

Maths Avancées 2

Les exercices marqués d'une étoile ont été traités en cours.

Exercice 1

i) Pour chacun des sous-ensembles suivants de \mathbb{R} , dire s'il est ouvert, fermé, compact ou rien du tout (justifier) : $[0, 1]$, $[0, 1[$, $]0, 1[$, $[0, 1] \cup [2, 3]$, $[0, 1] \cup]2, 3[$, $[0, 1[\cup]1, 2]$, $]0, 1[\cup]1, 2[$, $[0, +\infty[$, $]0, +\infty[$, $\{1/n, n \in \mathbb{N}\}$, $\{1/n, n \in \mathbb{N}\} \cup \{0\}$.

ii) Même question avec les sous-ensembles suivants de \mathbb{R}^2 (muni d'une norme usuelle) : $\{(x, y), x \in]-1, 1[, y \in]0, 1[\}$, $\{(0, y), y \in]0, 1[\}$, $\{(0, y), y \in [0, 1] \}$, $\{(x, y), x > 0 \text{ et } x + y \geq 0 \}$, $\{(x, 1/x), x \neq 0 \}$.

Exercice 2* Soit $u = (x, y)$ un vecteur de \mathbb{R}^2 . On définit $N(u) = x^2 + xy + 2y^2$. Montrer que $N(u)$ est une norme sur \mathbb{R}^2 .

Exercice 3* On définit $f(x, y) = xy/(x^2 + y^2)$ et $f(0, 0) = 0$. Montrer que f n'est pas continue en $(0, 0)$. On définit $g(x, y) = xy/\sqrt{x^2 + y^2}$ et $g(0, 0) = 0$. Montrer que g est continue en $(0, 0)$.