

## Maths Avancées 2

Les exercices marqués d'une étoile ont été traités en cours.

### Exercice 1

i) Pour chacun des sous-ensembles suivants de  $\mathbb{R}$ , dire s'il est ouvert, fermé, compact ou rien du tout (justifier) :  $[0, 1]$ ,  $[0, 1[$ ,  $]0, 1[$ ,  $[0, 1] \cup [2, 3]$ ,  $[0, 1] \cup ]2, 3[$ ,  $[0, 1[ \cup ]1, 2]$ ,  $]0, 1[ \cup ]1, 2[$ ,  $[0, +\infty[$ ,  $]0, +\infty[$ ,  $\{1/n, n \in \mathbb{N}\}$ ,  $\{1/n, n \in \mathbb{N}\} \cup \{0\}$ .

ii) Même question avec les sous-ensembles suivants de  $\mathbb{R}^2$  (muni d'une norme usuelle) :  $\{(x, y), x \in ]-1, 1[, y \in ]0, 1[ \}$ ,  $\{(0, y), y \in ]0, 1[ \}$ ,  $\{(0, y), y \in [0, 1] \}$ ,  $\{(x, y), x > 0 \text{ et } x + y \geq 0 \}$ ,  $\{(x, 1/x), x \neq 0 \}$ .

**Exercice 2\*** Soit  $u = (x, y)$  un vecteur de  $\mathbb{R}^2$ . On définit  $N(u) = x^2 + xy + 2y^2$ . Montrer que  $N(u)$  est une norme sur  $\mathbb{R}^2$ .

**Exercice 3\*** On définit  $f(x, y) = xy/(x^2 + y^2)$  et  $f(0, 0) = 0$ . Montrer que  $f$  n'est pas continue en  $(0, 0)$ . On définit  $g(x, y) = xy/\sqrt{x^2 + y^2}$  et  $g(0, 0) = 0$ . Montrer que  $g$  est continue en  $(0, 0)$ .