L1 Maths et Info
Mathématiques discrètes 1
Partiel du 5 novembre 2007

Durée : 2h - Responsable : L. Regnier

Documents et calculatrices non autorisés. Prévoir environ 20 minutes par exo, 30 minutes au (grand) maximum.

Exercice 1 Rappeler les définitions de :

i) partie d'un ensemble ;

ii) fonction injective, surjective et bijective ;

Exercice 2 Dans chacun des énoncés suivants, préciser le type de l'énoncé (définition ou proposition), les hypothèses et conclusions s'il s'agit d'une proposition, l'objet défini s'il s'agit d'une définition ; puis donner le type de chaque symbole utilisé dans l'énoncé.

i) Si $X \subset \mathbb{N}$ et $X \neq \emptyset$, alors il existe $n \in X$ tel que $n \geq p$ pour tout $p \in X$.

ii) Si $f : X \to Y$ est une bijection, alors il existe $g : Y \to X$ telle que $g(f(x)) = x$ pour tout x dans X, et $f(g(y)) = y$ pour tout y dans Y.

iii) Si $z \subset \mathbb{N}$ et $x \in \mathcal{P}(z)$ alors pour tout $y \in x$, $y \in z$.

iv) Une *partition* de X est un ensemble P tel que pour tout $A, B \in P$, si $A \neq B$ alors $A \cap B = \emptyset$ et pour tout $x \in X$ il existe un $A \in P$ tel que $x \in A$.

Exercice 3 Pour chacune des fonctions suivantes, indiquer si elle est injective, surjective, bijective. Si la fonction n'est pas injective, on dira pourquoi, et de même si elle n'est pas surjective. Si la fonction est bijective on donnera son inverse.

i) $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $f(x) = 2x$;

ii) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 2x$;

iii) $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $f(x) = x^2$;

iv) $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, $f(x) = x^2$;

v) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$, $f(x) = x^2$;

vi) $f : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$, $f(x, y) = x + y$;

vii) $f : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}^2$, $f(x, y) = (x + y, x)$;

viii) $f : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}^2$, $f(x, y) = (y, x)$;

Exercice 4 Soit S et D deux ensembles d'entiers naturels. Les éléments de S seront appelés les entiers *secrets* et ceux de D seront appelés les entiers *discrets*. Écrire formellement les énoncés ci-dessous en suivant le modèle : « tout entier secret est discret » devient « $\forall n \in \mathbb{N},$ si $n \in S$ alors $n \in D$ ».

i) aucun entier discret n'est secret ;

ii) il y a des entiers discrets qui sont secrets ;

iii) il y a au plus un entier discret qui est secret ;

iv) il y a un unique entier secret qui n'est pas discret (on évitera d'utiliser la notation $\exists!$) ;

v) pour tout entier secret, il y a un entier discret qui lui est supérieur ;

vi) il y a un entier discret qui majore tous les entiers secrets ;

vii) si deux entiers distincts sont discrets alors au moins l'un des deux est secret ;

viii) un entier est secret si il est discret et toutes ses puissances sont discrètes.