L1 Maths et Info
Mathématiques discrètes 1
Examen du 18 décembre 2007

Durée : 3h - Responsable : L. Regnier

Documents et calculatrices non autorisés. Prévoir environ 20 minutes par exo, 30 minutes au (grand) maximum.

Exercice 1 Soit C un ensemble de couples d'entiers naturels. Si le couple (x, y) appartient à C on dit que x est un C-parent de y et on note $x \to_C y$.
Écrire formellement les énoncés ci-dessous en suivant le modèle : « si m est un C-parent de n et n est un C-parent de p alors m est un C-parent de p » devient « $\forall m, n, p \in \mathbb{N}$, si $m \to_C n$ et $n \to_C p$ alors $m \to_C p$ ».

- i) 1 est un C-parent de 0.
- ii) 0 n'a pas de C-parent.
- iii) 0 a un unique C-parent.
- iv) 0 est l'unique entier naturel qui est C-parent de lui-même.
- v) Tout entier naturel pair a au moins un C-parent.
- vi) Si un entier naturel a un C-parent alors il est pair.
- vii) Tous les C-parents d'un entier naturel pair sont impairs.
- viii) p est le plus grand C-parent de n inférieur ou égal à n.

Exercice 2 Soit $f : X \to Y$ une application.

- i) Pour $U \subset X$, écrire l'ensemble $f(U)$ en compréhension.
- ii) Pour $V \subset Y$, écrire l'ensemble $f^{-1}(V)$ en compréhension.
- iii) Montrer que $U \subset f^{-1}(f(U))$ pour tout $U \subset X$.

On suppose maintenant que $X = \mathbb{Z}$, $Y = \mathbb{N}$, et f est l'application *valeur absolue*.

- iv) L'application f est-elle injective, surjective, bijective ? On justifiera chaque réponse en une phrase.
- v) Donner un exemple de $U \subset X$ tel que l'inclusion $U \subset f^{-1}(f(U))$ est stricte. (On calculera $f(U)$ et $f^{-1}(f(U))$.)

Exercice 3

- i) Développer $(1 + x)^n$.
- ii) Dériver les deux expressions de $(1 + x)^n$.
- iii) Calculer $\sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} k \binom{n}{k}$.
- iv) Calculer $\sum_{k=2}^{n} k(k-1) \binom{n}{k}$.

Exercice 4 Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n non nul le nombre $2^{3n} - 1$ est divisible par 7.

Exercice 5

- i) Énoncer les deux formes du théorème de Bezout.

Pour chaque couple d'entiers (m, n) suivant appliquer l'algorithme d'Euclide pour trouver le PGCD et les coefficients de Bezout u et v de m et n ; on explicitera les divisions euclidiennes effectuées en les écrivant selon le modèle $a = q \times b + r$ pour la division de a par b (par exemple la division de 7 par 3 s'écrira : $7 = 2 \times 3 + 1$) :

- ii) $m = 233$ et $n = 144$;
- iii) $m = 232$ et $n = 144$;
- iv) $m = 232$ et $n = 143$.