L1 Maths et Info - 2007-2008
Mathématiques discrètes 1
Examen du 18 juin 2008

Durée : 3h - Responsable : L. Regnier

Documents et calculatrices non autorisés. Prévoir environ 20 minutes par exo, 30 minutes au (grand) maximum.

Exercice 1 On définit les deux ensembles d'entiers relatifs $P = \{2n,\ n \in \mathbb{Z}\}$ et $T = \{3n,\ n \in \mathbb{Z}\}$.

i) Donner les définitions de P et T en français : P est l'ensemble des..., T est l'ensemble des...

ii) Donner une caractérisation simple des éléments de $P \cap T$.

iii) Montrer que $P \cup T \neq \mathbb{Z}$.

On définit $S = \{2n + 3p,\ n, p \in \mathbb{Z}\}$.

iv) Montrer que $P \cup T \subset S$.

v) Montrer en utilisant un théorème du cours (que l'on énoncera) que $S = \mathbb{Z}$.

Exercice 2

i) Donner la définition du coefficient binomial $\binom{n}{p}$ (c'est le nombre de...) puis la formule explicite et la relation de récurrence.

ii) Montrer que $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$.

iii) Montrer que $\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k} = n2^{n-1}$.

Exercice 3 Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n on a $\sum_{k=1}^{n} k^2 = n(n+1)(2n+1)/6$

Exercice 4 On rappelle que si n est un entier naturel, $[0, n]$ désigne l'ensemble des entiers compris entre 0 et n. Si n et p sont deux entiers et p est non nul, on note $n \bmod p$ le reste de la division euclidienne de n par p.

i) Écrire les ensembles $[0, 2]$, $[0, 3]$ et $[0, 2] \times [0, 3]$ en extension.

On définit une fonction $f : [0, 11] \to [0, 2] \times [0, 3]$ par $f(x) = (x \bmod 3, x \bmod 4)$.

ii) Donner la valeur de $f(x)$ pour chaque $x \in [0, 11]$.

iii) La fonction f est-elle injective ? surjective ? bijective ?

On définit maintenant une fonction $g : [0, 11] \to [0, 1] \times [0, 5]$ par $f(x) = (x \bmod 2, x \bmod 6)$.

iv) Donner la valeur de $g(x)$ pour chaque $x \in [0, 11]$.

v) Donner les images réciproques par g des ensembles $\{(0, 2)\}$, $\{(1, 2)\}$ et $\{(0, 2), (1, 2)\}$.

vi) La fonction g est-elle injective ? surjective ? bijective ?

vii) Comment expliquer les différences observées entre f et g ?