

L1 Maths et Info
Mathématiques discrètes 1
Partiel du 3 novembre 2008
Durée : 2h - Responsable : L. Regnier

Documents et calculatrices non autorisés. Prévoir environ 20 minutes par exo, 30 minutes au (grand) maximum.

Exercice 1

- i) Rappeler les définitions de image directe, image réciproque et de fonction inverse (ou réciproque);
- ii) Soit $f : X \rightarrow Y$ une fonction. Montrer que f est injective ssi pour toute partie A de X on a $f^{-1}(f(A)) = A$.

Exercice 2 Soit $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ une fonction sur les entiers. Écrire formellement les énoncés suivants :

- i) f est injective;
- ii) f est surjective;
- iii) l'image par f de tout entier pair est nulle;
- iv) l'image par f d'au moins un entier pair est nulle;
- v) il y a un unique entier égal à son image par f ;
- vi) les entiers pairs ont au moins un antécédent par f ;
- vii) les entiers pairs ont au moins un antécédent pair par f ;
- viii) les antécédents par f des entiers pairs sont tous pairs;
- ix) tout entier ayant un antécédent pair par f est pair;
- x) seuls les entiers pairs ont des antécédents pairs par f .

Exercice 3 Soient X un ensemble d'entiers naturels. On définit une fonction $f_X : \mathcal{P}(\mathbb{N}) \rightarrow \mathcal{P}(\mathbb{N})$ par $f_X(A) = A \cap X$;

- i) Supposons que $0 \notin X$; trouver deux ensembles d'entiers A et B distincts tels que $f_X(A) = f_X(B)$ (la fonction f_X n'est donc pas injective).
- ii) Soit n un entier et supposons maintenant que $n \notin X$; trouver deux ensembles d'entiers A et B distincts tels que $f_X(A) = f_X(B)$.
- iii) À quelle condition sur X la fonction f_X est-elle injective?
- iv) À quelle condition sur X la fonction f_X est-elle surjective?