

L1 Maths et Info
Mathématiques discrètes 1
Partiel du 2 novembre 2009
Durée : 2h - Responsable : L. Regnier

Documents et calculatrices non autorisés. Prévoir environ 20 minutes par exo, 30 minutes au (grand) maximum.

Exercice 1

- i) Combien y-a-t-il d'éléments dans l'ensemble \emptyset ? dans $\{\emptyset\}$? dans $\{\emptyset, \emptyset\}$, dans $\{\emptyset, \{\emptyset\}\}$?

Soit l'ensemble d'entiers naturels $X = [2, 4]$.

- ii) Écrire l'ensemble X en extension; combien a-t-il d'éléments?
iii) Calculer l'ensemble des parties de X .
iv) Donner une partition de X en deux classes.
v) Donne une partition de $\mathcal{P}(X)$ en quatre classes.

Exercice 2 Soit $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ une fonction sur les entiers, n et p deux entiers. Écrire formellement les énoncés suivants :

- i) f est injective;
ii) f est surjective;
iii) L'entier n est pair;
iv) Les images des entiers pairs par f sont paires;
v) Les entiers qui ont une image paire par f sont pairs;
vi) L'entier p divise l'entier n ;
vii) L'image par f du diviseur d'un entier quelconque divise l'image de cet entier;
viii) La fonction f est périodique de période l'entier n ;
ix) La fonction f est périodique;
x) La fonction f est ultimement constante.

Exercice 3 Montrer que pour tout entier naturel n on a :

$$\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Exercice 4 Soit $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ une fonction.

- i) Soit $A \subset \mathbb{Z}$; rappeler la définition de $f(A)$.
ii) Soit $B \subset \mathbb{Z}$; rappeler la définition de $f^{-1}(B)$.

On suppose maintenant que f est définie par $f(n) = n^2$.

- iii) Calculer $f(\{2\})$ et $f(\{2, 3\})$.
iv) Calculer $f^{-1}(\{2\})$, $f^{-1}(\{4\})$ et $f^{-1}(\{2, 4\})$.