L1 Maths et Info
Mathématiques discrètes 1
Examen du 4 janvier 2010

Durée : 2h - Responsable : L. Regnier

Documents et calculatrices non autorisés. Prévoir environ 20 minutes par exo, 30 minutes au (grand) maximum.

Exercice 1 Soient $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ une fonction sur les entiers naturels, n et p deux entiers naturels et A un ensemble d'entiers naturels. Écrire formellement les énoncés ci-dessous :

i) f est bijective ;

ii) les éléments de A ont tous au moins un antécédent par f ;

iii) les éléments de A ont tous au plus un antécédent par f ;

iv) n est un multiple de p ;

v) A est l'ensemble des multiples de p ;

vi) A est l'ensemble des images par f des multiples de p ;

vii) tout élément de A a pour image par f un multiple de p ;

viii) A est majoré ;

ix) A a un plus grand élément ;

x) si A est non vide et majoré alors A a un plus grand élément.

Indication : On évitera les notations pour revenir aux définitions : pour dire que A est inclus dans $\mathbb{N}$ on écrira $\forall x \in A, x \in \mathbb{N}$ et non pas $A \subset \mathbb{N}$ ni $A \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$. On évitera également les abbréviations trop commodes du genre $\exists!$ pour « il existe un unique », $x \equiv 0(p)$ pour « x est un multiple de p » ou $f(A)$ pour « l'image directe de A ». Par contre on pourra utiliser les notations en compréhension pour définir des ensembles ; par exemple l'image directe de A s'écrit : $\{f(x),\, x \in A\}$.

Exercice 2 Montrer que pour tout entier naturel n (et pour tout nombre x) on a :

$$(1-x)\sum_{k=0}^{n} x^k = 1 - x^{n+1}$$

Exercice 3

i) Écrire le triangle de Pascal pour calculer les coefficients du binômes $\binom{n}{p}$ jusqu'à $n = 12$.

ii) Pour chaque $n = 2, 3, \ldots, 12$ et pour chaque $p = 1, \ldots, n-1$ dire si n divise $\binom{n}{p}$; la réponse doit être un tableau sur le modèle du triangle de Pascal : on ne remplit la case à la ligne n et la colonne p que si $p \leq n$ et dans ce cas on écrit 1 si n divise $\binom{n}{p}$, 0 sinon.

iii) Qu'est ce qui est faux dans le raisonnement suivant : supposons que n et p sont des entiers tels que $0 < p < n$; on a alors

$$\begin{aligned}\binom{n}{p} &= \frac{n!}{p!(n-p)!} \\ &= n \times \frac{(n-1)!}{p!(n-p)!} \qquad \text{car } n! = n \times (n-1)!\end{aligned}$$

donc $\binom{n}{p}$ est un multiple de n dès que $0 < p < n$ et par conséquent n divise toujours $\binom{n}{p}$ quand $0 < p < n$.

Exercice 4 On rappelle que la suite de Fibonacci est définie par : $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ et $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$.

i) Calculer F_n pour $n = 2, 3, \ldots, 12$;

ii) Pour $n = 2, 3, \ldots, 10$ appliquer l'algorithme d'Euclide à F_n et F_{n-1} et trouver des entiers relatifs u_n et v_n tels que $u_n F_n + v_n F_{n-1} = 1$.

iii) Quelle formule générale pour u_n et v_n peut on déduire du calcul précédent ?

iv) Appliquer l'algorithme d'Euclide à $F_{10} - 1$ et F_9 ; que constate-t-on par rapport à F_{10} et F_9 ?