Faculté des Sciences de Luminy - Licence IM - Semestre 1

Mathématiques discrètes 1 (MAT32)

Corrigé de Yves Lafont du partiel du 3 novembre 2010

Exercice 1

On note $S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} x^k$.

i. Si $x \neq 1$, on a $S_n(x) = \dfrac{1 - x^{n+1}}{1 - x}$.

ii. On a

$$\begin{aligned}
(1-x)S_n(x) &= S_n(x) - xS_n(x) \\
&= \sum_{k=0}^{n} x^k - x\sum_{k=0}^{n} x^k \\
&= \sum_{k=0}^{n} x^k - \sum_{k=0}^{n} x^{k+1} \\
&= \sum_{k=0}^{n} x^k - \sum_{k=1}^{n+1} x^k \\
&= x^0 + \sum_{k=1}^{n} x^k - \sum_{k=1}^{n} x^k - x^{n+1} \\
&= 1 - x^{n+1}.
\end{aligned}$$

On retrouve donc la formule ci-dessus.

Exercice 2

(E) est l'énoncé : « si $f : A \to B$ est injective alors $|A| \leq |B|$ ».

i. La réciproque (R), la contraposée (C) et la négation de (E) sont :

(R) Si $|A| \leq |B|$, alors f est injective,

(C) Si $|A| > |B|$, alors f n'est pas injective,

(N) f est injective et $|A| > |B|$.

ii. L'énoncé (E) est un théorème, ainsi que sa contraposée (C).

iii. Les autres énoncés (R) et (N) ne sont pas des théorèmes :

Contre-exemple pour (R) : $A = \{1, 2\}$, $B = \{1, 2, 3\}$, et $f : A \to B$ est définie par $f(1) = f(2) = 1$. [On a $|A| = 2 \leq 3 = |B|$, mais f n'est pas injective.]

Contre-exemple pour (N) : le même. [Comme (E) est un théorème, donc est vrai pour n'importe quelle fonction $f : A \to B$, sa négation est fausse pour n'importe quelle fonction $f : A \to B$.]

Exercice 3

i. Les couples d'entiers appartenant à $[0, 3] \times [0, 3]$ sont : $(0, 0)$, $(0, 1)$, $(0, 2)$, $(0, 3)$, $(1, 0)$, $(1, 1)$, $(1, 2)$, $(1, 3)$, $(2, 0)$, $(2, 1)$, $(2, 2)$, $(2, 3)$, $(3, 0)$, $(3, 1)$, $(3, 2)$, $(3, 3)$. On a $1\ R\ 0$, $2\ R\ 1$, $0\ R\ 2$, et ce sont les seuls cas où $n\ R\ p$ avec $(n, p) \in [0, 3] \times [0, 3]$.

ii. R est circulaire, mais :

R n'est pas réflexive : on n'a pas $0\ R\ 0$;

R n'est pas symétrique : on a $1\ R\ 0$, mais pas $0\ R\ 1$;

R n'est pas transitive : on a $2\ R\ 1$ et $1\ R\ 0$, mais pas $2\ R\ 0$.

Exercice 4

i. On a :

$$
\begin{array}{rcl}
X \setminus A & = & \{x \in X \mid x \notin A\}, \\
f(A) & = & \{f(x) \mid x \in A\} = \{y \in Y \mid \exists x \in A, y = f(x)\}, \\
Y \setminus f(A) & = & \{y \in Y \mid y \notin f(A)\} = \{y \in Y \mid \forall x \in A, y \neq f(x)\}.
\end{array}
$$

ii. Supposons que $f : X \to Y$ soit injective, et soit $A \subset X$. Montrons que $f(X \setminus A) \subset Y \setminus f(A)$.

Soit $y \in f(X \setminus A)$; par définition il existe $x \in X \setminus A$ tel que $y = f(x)$. Soit $x' \in A$, on a $x \neq x'$ puisque $x \in X \setminus A$; comme f est injective on en déduit que $f(x) \neq f(x')$. Par conséquent $f(x) \notin f(A)$, autrement dit on a $y \in Y \setminus f(A)$. CQFD.

iii. La réciproque est : si pour tout $A \subset X$ on a $f(X \setminus A) \subset Y \setminus f(A)$, alors f est injective.

En effet, supposons que $f(X \setminus A) \subset Y \setminus f(A)$ pour tout $A \subset X$, et montrons que f est injective. Soient $x, x' \in X$ tels que $x \neq x'$ et posons $A = \{x\}$. Alors $x \in A$, d'où $f(x) \in f(A)$, et $x' \in X \setminus A$, d'où $f(x') \in f(X \setminus A) \subset Y \setminus f(A)$. On a donc $f(x') \notin f(A)$, d'où $f(x) \neq f(x')$. CQFD.