L1 Maths et Info
Mathématiques discrètes 1
Partiel du 3 novembre 2010

Durée : 2h - Responsable : L. Regnier

Documents et calculatrices non autorisés. Prévoir environ 20 minutes par exo, 30 minutes au (grand) maximum.

Exercice 1 Soient n un entier naturel et x un nombre. On note $S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} x^n$.

i) Rappeler la formule pour $S_n(x)$ (quand $x \neq 1$).

On se propose maintenant de démontrer cette formule.

ii) Calculer $S_n(x) - xS_n(x)$ et en déduire la formule.

Exercice 2 Soient A et B deux ensembles finis et $f : A \to B$ une fonction. On rappelle que quand A est fini, $|A|$ désigne le nombre d'éléments de A. On considère l'énoncé *(E)* suivant : *si f est injective, alors* $|A| \leq |B|$.

i) Écrire la réciproque *(R)*, la contraposée *(C)*, et la négation *(N)* de l'énoncé *(E)*.

ii) Parmi les quatre énoncés *(E)*, *(R)*, *(C)* et *(N)*, lesquels sont des théorèmes ?

iii) Donner un contre-exemple pour chacun de ceux qui ne sont pas des théorèmes.

Exercice 3 On définit une relation R sur les entiers naturels par : $n\ R\ p$ ssi les deux propriétés suivantes sont vérifiées :

1. $n - p - 1$ est un multiple de 3 (ce qui s'écrit aussi $n \equiv p + 1 \mod 3$) ;
2. il existe un entier k tel que $3k \leq n < 3(k+1)$ et $3k \leq p < 3(k+1)$.

i) Donner tous les couples d'entiers appartenant à $[0,3] \times [0,3]$. Pour chacun de ces couples, indiquer si on a $n\ R\ p$ ou pas.

ii) Pour chacune des propriétés suivantes indiquer si elle est vérifiée ou pas (donner un contre-exemple en cas de réponse négative) :

1. la relation R est *réflexive* : $\forall n \in \mathbb{N}, n\ R\ n$;
2. la relation R est *symétrique* : $\forall n, p \in \mathbb{N}$, si $n\ R\ p$ alors $p\ R\ n$;
3. la relation R est *transitive* : $\forall n, p, q \in \mathbb{N}$, si $n\ R\ p$ et $p\ R\ q$ alors $n\ R\ q$.
4. la relation R est *circulaire* : $\forall n, p, q \in \mathbb{N}$, si $n\ R\ p$ et $p\ R\ q$ alors $q\ R\ n$.

Exercice 4 Soient X et Y deux ensembles, $f : X \to Y$ une fonction de X dans Y.

i) Soit A une partie de X. Rappeler les définitions en compréhension des ensembles $X \setminus A$, $f(A)$ et $Y \setminus f(A)$.

ii) Montrer que si f est injective alors pour tout $A \subset X$ on a $f(X \setminus A) \subset Y \setminus f(A)$.

iii) Quelle est la réciproque de cet énoncé ? Démontrer cette réciproque.