L1 Maths et Info
Mathématiques discrètes 1
Examen du 5 janvier 2011

Durée : 3h - Responsable : L. Regnier

Documents et calculatrices non autorisés.

Exercice 1 Soient $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{N}$ une fonction sur les entiers, n et p deux entiers, A et B deux ensembles d'entiers. Écrire formellement les énoncés ci-dessous :

i) p est l'image de n par f ;

ii) p est un antécédent de n par f ;

iii) f est injective ;

iv) f est surjective ;

v) B est l'image directe de A par f ;

vi) A est l'image réciproque de B par f ;

vii) les entiers négatifs ont une image nulle par f ;

viii) les entiers pairs ont un antécédent négatif par f ;

ix) les antécédents de p par f sont des multiples de 2 ;

x) l'image réciproque de B par f a un plus petit élément.

Indication : On évitera les notations pour revenir aux définitions : pour dire que A est inclus dans $\mathbb{N}$ on écrira $\forall x \in A, x \in \mathbb{N}$ et non pas $A \subset \mathbb{N}$ ni $A \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$. On évitera également les abbréviations trop commodes du genre $\exists!$ pour « il existe un unique », $x \equiv 0(p)$ pour « x est un multiple de p » ou $f(A)$ pour « l'image directe de A ». Par contre on pourra utiliser les notations en compréhension pour définir des ensembles ; par exemple l'image directe de A s'écrit : $\{f(x),\, x \in A\}$.

Exercice 2 Soit n un entier naturel, X un ensemble fini à $n+1$ éléments et x_0 un élément de X. On note $Y = X \setminus \{x_0\}$ (l'ensemble X privé de x_0).

i) Quel est le cardinal de Y ?

ii) Soit $f : X \to Y$ une fonction. Est il possible que f soit injective ? surjective ? (justifier votre réponse)

Soit A une partie de Y à p éléments.

iii) Que peut-on dire de p par rapport à n ? Quel est le cardinal de $Y \setminus A$? de $X \setminus A$?

iv) Quel est le cardinal de $\mathcal{P}(Y \setminus A)$? de $\mathcal{P}(X \setminus A)$? de $A \times (Y \setminus A)$? de $A \times (X \setminus A)$?

v) Montrer que $Y \setminus A \subset X \setminus A$.

Exercice 3 Soit n un entier naturel et x un nombre réel.

i) Développer $(1+x)^n$.

ii) Dériver $(1+x)^n$ puis son développement calculé à la question précédente et en déduire la valeur de $\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k}$.

iii) Dériver une seconde fois $(1+x)^n$ et son développement et en déduire la valeur de $\sum_{k=0}^{n} k(k-1)\binom{n}{k}$.

iv) Calculer $\sum_{k=0}^{n} k^2\binom{n}{k}$.

Exercice 4

i) Rappeler les deux versions du théorème de Bezout.

ii) Trouver u et v dans $\mathbb{Z}$ tels que $5u + 7v = 1$.

iii) En élevant au carré le membre gauche, en déduire U et V dans $\mathbb{Z}$ tels que $25U + 7V = 1$

iv) Trouver U' et V' dans $\mathbb{Z}$ tels que $25U' + 49V' = 1$.

Soit a_1, a_2 et b trois entiers tels que a_1 et b sont premiers entre eux et a_2 et b sont premiers entre eux.

v) Montrer qu'il existe des entiers u et v tels que $ua_1a_2 + vb = 1$.