L1 Maths et Info
Mathématiques discrètes 1
Examen (session de rattrapage) du 7 juin 2011

Durée : 3h - Responsable : L. Regnier

Documents et calculatrices non autorisés.

Exercice 1 Soient $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{N}$ une fonction sur les entiers, n et p deux entiers, A et B deux ensembles d'entiers. Écrire formellement les énoncés ci-dessous :

i) f est injective ;
ii) f est surjective ;
iii) B est l'image directe de A par f ;
iv) A est l'image réciproque de B par f ;
v) f est la fonction constante égale à 2 ;
vi) f est une fonction constante ;
vii) f a un zéro (un entier dont l'image est nulle) ;
viii) f a exactement un zéro ;
ix) f n'a pour valeurs que des entiers pairs ;
x) les entiers pairs ont (au moins) un antécédent pair par f.

Indication : On évitera les notations pour revenir aux définitions : pour dire que A est inclus dans $\mathbb{N}$ on écrira $\forall x \in A, x \in \mathbb{N}$ et non pas $A \subset \mathbb{N}$ ni $A \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$. On évitera également les abbréviations trop commodes du genre $\exists!$ pour « il existe un unique », $x \equiv 0(p)$ pour « x est un multiple de p » ou $f(A)$ pour « l'image directe de A ». Par contre on pourra utiliser les notations en compréhension pour définir des ensembles ; par exemple l'image directe de A s'écrit : $\{f(x),\, x \in A\}$.

Exercice 2 Soient A et B deux ensembles finis.

i) Rappeler les valeurs des cardinaux de $A \times B$ et de $\mathcal{P}(A)$.

ii) Soit $f : A \to B$ une fonction que l'on suppose injective ; que peut on dire des cardinaux de A et de B ? Que peut-on dire si f est supposée surjective ? bijective ?

iii) On suppose qu'il y a deux fonctions $f : A \to B$ et $g : B \to A$ telles que $g \circ f = \mathrm{Id}_A$ (c'est-à-dire que pour tout $a \in A$ on a $g(f(a)) = a$) ; montrer que f est injective et que g est surjective.

iv) Est-il possible d'avoir une fonction $f : A \to A \times A$ qui soit injective ? surjective ?

Exercice 3

i) Rappeler la formule de récurrence et la formule explicite permettant de calculer le coefficient du binôme $\binom{n}{p}$.

ii) Soient a et b deux nombres et n un entier naturel ; rappeler le développement de $(a+b)^n$ (formule du binôme).

iii) Montrer que $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$.

Dans ce qui suit on note $E(n/2)$ la partie entière de $n/2$, c'est à dire le plus grand entier inférieur à $n/2$; on a donc $E(n/2) = n/2$ si n est pair et $E(n/2) = (n-1)/2$ si n est impair.

iv) En développant $(1-1)^n$ montrer que $\sum_{k=0}^{E(n/2)} \binom{n}{2k} = \sum_{k=0}^{E((n-1)/2)} \binom{n}{2k+1}$.

v) Déduire de ce qui précède que $\sum_{k=0}^{E(n/2)} = 2^{n-1}$

Exercice 4

i) Rappeler les deux versions du théorème de Bezout.

ii) Trouver u et v dans $\mathbb{Z}$ tels que $13u + 8v = 1$.

iii) Donner toutes les solutions entières u et v de l'équation $13u + 8v = 1$.

iv) Montrer que si a, b et c sont trois entiers premiers entre eux (n'ont pas d'autres diviseurs communs que 1) alors il existe u, v, w tels que $ua + vb + wc = 1$.

Indication : Appliquer le théorème de Bezout à a et b en prenant garde qu'ils ne sont pas forcément premiers entre eux, puis appliquer une seconde fois le théorème de Bezout et conclure.