L1 Maths et Info
Mathématiques discrètes 1
Partiel du 7 novembre 2011

Durée : 2h - Responsable : L. Regnier

Documents et calculatrices non autorisés. Prévoir environ 20 minutes par exo, 30 minutes au (grand) maximum.

Exercice 1 Dans cet exercice, n designe un entier naturel.

i) Soit $S_n = 1 + 2 + 4 + \cdots + 2^n$; écrire S_n en utilisant la notation Σ.

ii) Soit $D_n = 2 + 4 + \cdots + 2^{n+1}$; écrire D_n en utilisant la notation Σ.

iii) Trouver un entier a_n tel que $D_n = S_n + a_n$.

iv) En déduire que $S_n = a_n$.

Exercice 2 On rappelle que si n et p sont deux entiers, n *divise* p signifie que p est un multiple de n, c'est à dire qu'il existe un entier k tel que $p = kn$.
On définit une relation R sur les entiers naturels par : $n\ R\ p$ ssi 2^n divise p.

i) En utilisant la définition de *divise* rappelée ci-dessus, écrire formellement la définition de R.

ii) Pour chacune des propriétés suivantes indiquer si elle est vérifiée ou pas (justifier succintement chaque réponse) :

1. la relation R est réflexive : pour tout $n \in \mathbb{N}, n\ R\ n$;
2. $\exists n \in \mathbb{N}, n\ R\ n$;
3. $\forall n \in \mathbb{N}, n\ R\ 0$;
4. $\exists p \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, n\ R\ p$;
5. $\exists n \in \mathbb{N}, \forall p \in \mathbb{N}, n\ R\ p$;

Exercice 3 Soient X et Y deux ensembles, $f : X \to Y$ une fonction de X dans Y.

i) Soit A une partie de X et B une partie de Y. Rappeler les définitions de $f(A)$ et $f^{-1}(B)$.

On pose $X = Y = \mathbb{N}$ et on définit f par $f(n) = 0$ si n est impair, $n/2$ si n est pair.

ii) Calculer $f(0)$, $f(1)$, $f(2)$, $f(3)$, $f(4)$ et $f(5)$.

On note $\mathbb{N}_2$ l'ensemble des entiers pairs et $\mathbb{N}'_2$ l'ensemble des entiers impairs.

iii) Écrire formellement $\mathbb{N}_2$ et $\mathbb{N}'_2$ sur le modèle $X = \{x \in ... \text{ tel que } ...\}$.

iv) Calculer les ensembles $f(\mathbb{N})$, $f(\mathbb{N}_2)$, $f(\mathbb{N}'_2)$, $f^{-1}(\mathbb{N})$, $f^{-1}(\{0\})$, $f^{-1}(\{0, 1\})$.

Exercice 4 Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n on a :

$$n^2 = \sum_{k=0}^{n-1} (2k + 1)$$