Maths Discrètes 1 ; exos du chapitre « Dénombrement, combinatoire élémentaire »

Exercice 1 Démontrer que pour tout entier naturel n on a l'égalité :

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}$$

Indication : On peut utiliser la formule du binôme et calculer $(x+y)^{2n}$ de deux manières différentes ; on peut également utiliser un raisonnement combinatoire.

Réponse.

1ère méthode. On calcule $(x+y)^{2n}$; on a en appliquant directement la formule du binôme :

$$(x+y)^{2n} = \sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k} x^{2n-k} y^k$$

Mais on a également :

$$\begin{aligned}
(x+y)^{2n} &= \left((x+y)^n\right)^2 \\
&= \left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} y^k\right)^2 \qquad \text{par la formule du binôme appliquée à } (x+y)^n \\
&= \left(\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} x^{n-i} y^i\right) \left(\sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} x^{n-j} y^j\right) \\
&= \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{i} \binom{n}{j} x^{n-i-j} y^{i+j} \\
&= \sum_{\substack{0 \le i \le n \\ 0 \le j \le n}} \binom{n}{i} \binom{n}{j} x^{n-i-j} y^{i+j} \\
&= \sum_{k=0}^{2n} \sum_{\substack{i+j=k \\ 0 \le i \le n \\ 0 \le j \le n}} \binom{n}{i} \binom{n}{j} x^{n-i-j} y^{i+j} \qquad \text{car } \{(i,j) \text{ tel que } 0 \le i,j \le n\} = \bigcup_{k=0}^{n} \{(i,j) \text{ tel que } i+j=k \text{ et } 0 \le i,j \le n\} \\
&= \sum_{k=0}^{2n} \sum_{\substack{i+j=k \\ 0 \le i \le n \\ 0 \le j \le n}} \binom{n}{i} \binom{n}{j} x^{n-k} y^{k} \\
&= \sum_{k=0}^{2n} \left(\sum_{\substack{i+j=k \\ 0 \le i \le n \\ 0 \le j \le n}} \binom{n}{i} \binom{n}{j} \right) x^{n-k} y^{k} \qquad \text{en factorisant par } x^{n-k} y^k \\
&= \sum_{k=0}^{2n} \left(\sum_{\substack{0 \le i \le n \\ 0 \le k-i \le n}} \binom{n}{i} \binom{n}{k-i} \right) x^{n-k} y^{k} \qquad \text{par le changement de variable } j \mapsto k-i
\end{aligned}$$

On a donc pour tous nombres (naturels, relatifs, rationnels, réels, complexes...) x et y :

$$\sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k} x^{2n-k} y^k = \sum_{k=0}^{2n} \left(\sum_{\substack{0 \le i \le n \\ 0 \le k-i \le n}} \binom{n}{i} \binom{n}{k-i} \right) x^{n-k} y^{k}$$

On en déduit que :

$$\binom{2n}{k} = \sum_{\substack{0 \leq i \leq n \\ 0 \leq k-i \leq n}} \binom{n}{i}\binom{n}{k-i}$$

pour tout k compris entre 0 et $2n$. En particulier pour $k = n$ on a :

$$\begin{aligned}
\binom{2n}{n} &= \sum_{\substack{0 \leq i \leq n \\ 0 \leq n-i \leq n}} \binom{n}{i}\binom{n}{n-i} \\
&= \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i}\binom{n}{n-i} \qquad \text{car lorsque } 0 \leq i \leq n \text{ on a aussi } 0 \leq n-i \leq n \\
&= \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i}\binom{n}{i} \qquad \text{car } \binom{n}{n-i} = \binom{n}{i} \\
&= \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i}^2
\end{aligned}$$

2ème méthode, la méthode combinatoire. On rappelle que la notation $\mathcal{P}_k(X)$ désigne l'ensemble des parties à k éléments de l'ensemble X. Par définition on sait que $\binom{2n}{n}$ est le nombre de parties à n éléments d'un ensemble à $2n$ éléments ; comme l'ensemble d'entiers $[1, 2n]$ a $2n$ éléments, on a donc :

$$\binom{2n}{n} = |\mathcal{P}_n([1, 2n])|$$

De même $\binom{n}{k}$ est le nombre de parties à k éléments dans un ensemble à n éléments, donc :

$$\binom{n}{k} = |\mathcal{P}_k([1, n])|$$

Donc $\binom{n}{k}^2$ est le nombre de *couples* de parties à k éléments d'un ensemble à n éléments, c'est à dire :

$$\binom{n}{k}^2 = |\mathcal{P}_k([1, n]) \times \mathcal{P}_k([1, n])|$$

Soit (A, B) un couple de parties à k éléments de $[1, n]$, c'est à dire soit $(A, B) \in \mathcal{P}_k([1, n]) \times \mathcal{P}_k([1, n])$. Alors pour tout $l \neq k$ on a $(A, B) \notin \mathcal{P}_l([1, n]) \times \mathcal{P}_l([1, n])$ (sinon A et B auraient à la fois k éléments et l éléments). Autrement dit quand $\neq l$ les ensembles $\mathcal{P}_k([1, n]) \times \mathcal{P}_k([1, n])$ et $\mathcal{P}_l([1, n]) \times \mathcal{P}_l([1, n])$ sont disjoints si bien que l'on a :

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 = \left| \bigcup_{k=0}^{n} \mathcal{P}_k([1, n]) \times \mathcal{P}_k([1, n]) \right|$$

Pour montrer l'égalité

$$\binom{2n}{n} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2$$

il suffit donc de montrer qu'il existe une bijection entre les ensembles $\mathcal{P}_n([1, 2n])$ et $\bigcup_{k=0}^{n} \mathcal{P}_k([1, n]) \times \mathcal{P}_k([1, n])$.
Soit A une partie de $[1, 2n]$ contenant n éléments, c'est à dire un élément de $\mathcal{P}_n([1, 2n])$; on note A_1 et A_2 les sous-ensembles de A constitués des éléments de A respectivements plus petits et strictement plus grand que n, c'est à dire :

$$A_1 = \{p \in A \text{ tel que } p \leq n\} = A \cap [1, n], \qquad A_2 = \{p \in A \text{ tel que } p > n\} = A \cap [n+1, 2n]$$

Soit k le nombre d'éléments de A_1 ; alors, comme A a n éléments, le nombre d'éléments de A_2 est $n-k$. On note A_2' l'ensemble $A_2 - n$ (A_2 « translaté » de $-n$) c'est à dire :

$$A_2' = \{p-n,\, p \in A_2\}$$

L'ensemble A_2' a également $n-k$ éléments et comme $A_2 \subset [n+1, 2n]$ on a $A_2' \subset [1, n]$. Soit finalement B_1 le complémentaire de A_2' dans $[1, n]$; alors B_1 a k éléments.
Pour résumer, partant d'une partie A de $[1, 2n]$, on vient de construire un couple (A_1, B_1) de parties de $[1, n]$ tel que $|A_1| = |B_1| = k$ où k est le nombre d'éléments de A qui sont plus petits que n. On vient donc de définir la fonction

$$\begin{aligned}\varphi : \mathcal{P}_n([1,n]) \to \bigcup_{k=0}^{n} \mathcal{P}_k([1,n]) \times \mathcal{P}_k([1,n]) \\ A \to (A \cap [1,n], [1,n] \setminus (A \cap [n+1,2n] - n))\end{aligned}$$

Il est facile de vérifier que cette fonction est bijective, en construisant sa fonction inverse :

$$\begin{aligned}\psi : \bigcup_{k=0}^{n} \mathcal{P}_k([1,n]) \times \mathcal{P}_k([1,n]) \to P_n([1,2n]) \\ (A,B) \to A_{\cup}(([1,n] \setminus B) + n)\end{aligned}$$