Maths Discrètes 1 ; exos du chapitre « Le langage mathématique »

Exercice 1 Donner les types de tous les symboles et expressions utilisés dans les énoncés suivants :

- Soient a et b deux réels ; si $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ est continue et si $f(a) < 0$ et $f(b) > 0$ alors il existe $x_0 \in [a, b]$ tel que $f(x_0) = 0$.
- soient $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$; supposons que f est partout dérivable, que $f'(x) = 0$ pour tout x et qu'il existe x_0 tel que $f(x_0) = 0$; alors $f = 0$.
- Si X est un ensemble d'entiers naturels, alors X admet un plus petit élément x_0.
- Soit $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ une fonction sur les entiers. Il existe un entier n_0 tel que $f(n_0)$ est minimum, c'est à dire tel que pour tout n on a $f(n_0) \leq f(n)$.
- $\forall \epsilon > 0, \exists \alpha > 0, \forall x$ si $|x - x_0| < \alpha$ alors $|f(x) - f(x_0)| < \epsilon$

Exercice 2 Donner le type de chaque variable et expression dans l'énoncé suivant :

> Soit $\mathcal{T}$ une topologie sur un ensemble X. Une fonction $f : X \to X$ est dite *continue en* x si pour tout $V \in \mathcal{T}$ tel que $f(x) \in V$, on a $f^{-1}(V) \in \mathcal{T}$.

Vous n'avez pas besoin de savoir précisément ce qu'est une topologie. Sachez seulement que $f^{-1}(V)$ est défini comme l'ensemble des x tels que $f(x) \in V$.

Exercice 3 Donner le type de chaque variable dans l'énoncé suivant :

> Soit x une fonction sur h dérivable en f, il existe une fonction π sur $\mathbb{R}$ qui tend vers 0 en 0 et telle que $x(f + R) = x(f) + R.x'(f) + R.\pi(R)$ pour tout R tel que $f + R \in h$.

Exercice 4 Dans les énoncés suivant donner le statut de chaque variable (introduite dans l'énoncé ou pas), et donner la portée de chaque variable introduite.

i) Si n est un entier tel que $n = 2k$ pour un entier k alors n est pair.

ii) Il existe deux entiers q et r tels que $a = bq + r$ et $0 \leq r < b$.

iii) Le PGCD de a et b est l'entier d tel que : d divise a et b et $d' \leq d$ pour tout entier d' qui divise a et b.

iv) Si x est un réel positif non nul alors $x = nx'$ où n est un entier et x' un réel positif tel que $x' < 1$.

v) Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$, $x_0 \in I$ et f une fonction de I dans $\mathbb{R}$; on dit que f est continue en x_0 si pour tout $\epsilon > 0$, il existe $\alpha > 0$ tel que pour tout $x \in I$, si $|x - x_0| < \alpha$ alors $|f(x) - f(x_0)| < \epsilon$.

Exercice 5 Soit S et D deux ensembles d'entiers naturels. Les éléments de S seront appelés les entiers *secrets* et ceux de D seront appelés les entiers *discrets*. Écrire formellement les énoncés ci-dessous en suivant le modèle : « tout entier secret est discret » devient « $\forall n \in \mathbb{N}$, si $n \in S$ alors $n \in D$ ».

i) aucun entier discret n'est secret ;

ii) il y a des entiers discrets qui sont secrets ;

iii) il y a au plus un entier discret qui est secret ;

iv) il y a un unique entier secret qui n'est pas discret (on évitera d'utiliser la notation $\exists!$) ;

v) pour tout entier secret, il y a un entier discret qui lui est supérieur ;

vi) il y a un entier discret qui majore tous les entiers secrets ;

vii) si deux entiers distincts sont discrets alors au moins l'un des deux est secret ;

viii) un entier est secret si il est discret et toutes ses puissances sont discrètes.

Exercice 6 Soit C un ensemble de couples d'entiers naturels. Si le couple (x, y) appartient à C on dit que x est un C-parent de y et on note $x \to_C y$.

Écrire formellement les énoncés ci-dessous en suivant le modèle : « si m est un C-parent de n et n est un C-parent de p alors m est un C-parent de p » devient « $\forall m, n, p \in \mathbb{N},$ si $m \to_C n$ et $n \to_C p$ alors $m \to_C p$ ».

i) 1 est un C-parent de 0.

ii) 0 n'a pas de C-parent.

iii) 0 a un unique C-parent.

iv) 0 est l'unique entier naturel qui est C-parent de lui-même.

v) Tout entier naturel pair a au moins un C-parent.

vi) Si un entier naturel a un C-parent alors il est pair.

vii) Tous les C-parents d'un entier naturel pair sont impairs.

viii) p est le plus grand C-parent de n inférieur ou égal à n.

Exercice 7 Dans chacune des expressions suivantes, dire quel est l'indice de sommation et réécrire la même expression en changeant le nom de l'indice de sommation :

i) $\sum_{i=1}^{k} i^k$;

ii) $\prod_{1 \leq k \leq n} k$

Exercice 8 À quoi est égal la somme $\sum_{n=1}^{p} 1$?

Exercice 9 On note $S_n = \sum_{k=1}^{n} k$. Montrer, par le changement de variable de k en $n+1-k$ que $S_n = n(n+1) - S_n$.

Exercice 10 Soient $f(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$ et $g(x) = \sum_{j=0}^{p} b_j x^j$ deux fonctions polynomiales. Calculer $f(x)g(x)$.

Exercice 11 Écrire en français les énoncés :

i) $\exists k \in \mathbb{N},\, n = 2k$;

ii) $\forall n, p \in \mathbb{N},$ si $\exists k, l \in \mathbb{N}$ tel que $n = 2k$ et $p = 2l$ alors $\exists m \in \mathbb{N}$ tel que $n + p = 2m$;

iii) $\forall a, b, c \in \mathbb{C}, \exists z \in \mathbb{C}$ tel que $az^2 + bz + c = 0$.

Exercice 12 Écrire de façon complètement formelle les énoncés suivants :

i) Le carré de la somme de deux nombres est égal à la somme des carrés de ces deux nombres augmentée du double de leur produit.

ii) Le sinus de la somme de deux angles est la somme des produits du sinus de l'un par le cosinus de l'autre.

iii) Si une fonction dérivable sur un intervalle prend la même valeur en deux points distincts de cet intervalle, alors sa dérivée s'annule entre ces deux points.

iv) On dit qu'une suite de réels tend vers un point si, pour tout intervalle ouvert contenant ce point, elle prend toutes ses valeurs dans cet intervalle à partir d'un certain rang.

v) De toute suite réelle à valeurs dans un intervalle fermé on peut extraire une sous-suite convergente.

Exercice 13 On définit la relation $\leq$ sur $\mathbb{N}^2$ en posant que $(x, y) \leq (x', y')$ si $x = x'$ et $y \leq y'$. Dire si les propriétés suivantes sont vraies :

i) $\forall x, y \in \mathbb{N},\, (x, y) \leq (x, y)$;

ii) $\forall x, y, x', y' \in \mathbb{N}$, si $(x, y) \leq (x', y')$ et $(x', y') \leq (x, y)$ alors $x = x'$ et $y = y'$;

iii) $\forall x, y, x', y', x'', y'' \in \mathbb{N}$, si $(x, y) \leq (x', y')$ et $(x', y') \leq (x'', y'')$ alors $(x, y) \leq (x'', y'')$;

iv) $\forall x, y, x', y'$, soit $(x, y) \leq (x', y')$ soit $(x', y') \leq (x, y)$.

Exercice 14

i) Vue la définition de nombre composé, 0 est il composé ? et 1 ?, et 2 ? et 3 ? et 4 ? et 5 ? et 6 ?

ii) Le nombre π est-il composé ? Et $\sqrt[3]{8}$?

iii) Soit n un nombre entier. Le nombre $n!$ est-il composé ?

Exercice 15 Écrire la définition de nombre premier de manière complètement symbolique.

Exercice 16 0 est il premier ? et 1 ?, et 2 ? et 3 ? et 4 ? et 5 ? et 6 ?

Exercice 17 Quelles sont les hypothèses et la conclusion des énoncés suivant :

i) Soit p un nombre premier. Si a n'est pas divisible par p alors $a^{p-1} \equiv 1(p)$.

ii) Dans un triangle rectangle, la somme des carrés des côtés adjacents à l'angle droit est égal au carré de l'hypoténuse.

iii) Tout polynôme du second degré a deux racines complexes.

iv) L'ordre d'un sous-groupe divise l'ordre du groupe.

Exercice 18 Expliciter chacun des énoncés suivants en faisant clairement apparaître : la structure logique de l'énoncé, les hypothèses et la conclusion, le ou les (classes d') objets dont il est question.

i) Les diagonales d'un losange sont orthogonales.

ii) La somme de deux entiers est paire dès que les deux entiers ont la même parité.

iii) Quand l'un de deux entiers est pair, leur produit l'est également.

iv) Tout nombre réel positif a une racine carrée.

v) La limite des sommes de termes de la suite géométrique de raison $0 \leq \rho < 1$ existe et est $1/(1-\rho)$.

vi) L'image par une fonction continue d'une suite convergente est une suite convergente et la limite de l'image de la suite est l'image de la limite de la suite.

vii) Une fonction continue sur un intervalle et prenant des valeurs de signes différents aux extrémités de l'intervalle a (au moins) un zéro.

viii) Tout nombre entier se décompose de manière unique en un produit fini de puissances de nombres premiers.

Exercice 19

i) Démontrer que si x, y et z sont des entiers relatifs tels que $x + z = y + z$ alors $x = y$.

ii) Quelle hypothèse manque dans l'énoncé suivant : si x, y et z sont des rationnels tels que $xz = yz$ alors $x = y$?

iii) Démontrer que la somme de deux entiers pairs est paire et que la somme de deux entiers impairs est paire.

iv) Démontrer l'unicité de l'inverse sur les réels.

Exercice 20 Montrer que si a est un entier quelconque alors l'un des entiers a, $a+1$ ou $a+2$ est un multiple de 3.

Exercice 21 Montrer que $\sqrt{2}$ est irrationnel.