Maths Discrètes 1 ; exos du chapitre « Ensembles et fonctions »

Exercice 1 Écrire toutes les formes en extension de l'ensemble $\{n \in \mathbb{N},\, n^2 \leq 12\}$. Cet ensemble est-il égal à $\{n \in \mathbb{N},\, n^3 \leq 34\}$? et à $\{n \in \mathbb{N},\, n \text{ divise } 6\}$?

Exercice 2 Soient X, Y. Montrer que $X = Y$ ssi $X \subset Y$ et $Y \subset X$.

Exercice 3 Montrer que l'ensemble vide est inclus dans tout ensemble.

Exercice 4 Soient X et Y deux ensembles. Montrer que X et Y sont inclus dans $X \cup Y$ et que si Z contient X et Z contient Y alors Z contient $X \cup Y$.

Exercice 5 Montrer que $X \subset Y$ ssi $X \cup Y = Y$.

Exercice 6 Montrer que $X \cap Y$ est contenu dans X et dans Y, et que tout ensemble contenu dans X et dans Y est contenu dans $X \cap Y$.

Exercice 7 Montrer que $X \subset Y$ ssi $X \cap Y = X$.

Exercice 8 Montrer que $X \backslash Y \cap Y = \emptyset$ et $X \backslash Y \cup Y = X \cup Y$.

Exercice 9 Montrer que si $Y \subset X$ alors $X \backslash Y$ est le complémentaire de Y dans X.

Exercice 10 Soient X un ensemble et Y, Y' deux parties de X.

i) Montrer que $(Y \cup Y')^c = Y^c \cap Y'^c$ et que $(Y \cap Y')^c = Y^c \cup Y'^c$.

ii) Montrer que les propositions suivantes sont équivalentes :

- $Y \subset Y'$;
- $Y \cap Y' = Y$;
- $Y \cup Y' = Y'$;
- $Y \cap Y'^c = \emptyset$;
- $Y^c \cup Y' = X$

iii) Montrer que $Y \backslash Y' = Y \cap Y'^c$.

Exercice 11 Quelle est l'image de l'ensemble vide ?

Exercice 12 Soit $f : X \to Y$ une application.

i) Pour $U \subset X$, écrire l'ensemble $f(U)$ en compréhension.

ii) Pour $V \subset Y$, écrire l'ensemble $f^{-1}(V)$ en compréhension.

iii) Montrer que $U \subset f^{-1}(f(U))$ pour tout $U \subset X$.

On suppose maintenant que $X = \mathbb{Z}$, $Y = \mathbb{N}$, et f est l'application *valeur absolue*.

iv) L'application f est-elle injective, surjective, bijective ? On justifiera chaque réponse en une phrase.

v) Donner un exemple de $U \subset X$ tel que l'inclusion $U \subset f^{-1}(f(U))$ est stricte. (On calculera $f(U)$ et $f^{-1}(f(U))$.)

Exercice 13 Soit $f : D \to A$ une fonction.

i) Montrer que $f^{-1}(A) = D$.

ii) Soit E un sous-ensemble de A ; se peut-il que $f^{-1}(E) = \emptyset$?

iii) Montrer que si $y \neq y' \in A$ alors $f^{-1}(\{y\}) \cap f^{-1}(\{y'\}) = \emptyset$.

Exercice 14 Soit $f : D \to A$ une fonction, E un sous-ensemble de D et F un sous-ensemble de A.

i) Montrer que $E \subset f^{-1}(f(E))$. Trouver un exemple où l'inclusion est stricte.

ii) Montrer que $f(f^{-1}(F)) \subset F$. Trouver un exemple où l'inclusion est stricte.

Exercice 15 Pour chacune des fonctions f et g de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ suivantes, donner les valeurs de $f \circ f(x)$, $g \circ g(x)$, $f \circ g(x)$, $g \circ f(x)$:

i) $f(x) = -x$, $g(x) = |x|$;

ii) $f(x) = \sqrt{|x|}$, $g(x) = x^2$.

iii) $f(x) = x^3$, $g(x) = 2x + 1$;

iv) $f(x) = 1/(x^2 + 1)$, $g(x) = x^2 + 1$.

Exercice 16 Soit $f : A \to B$ une fonction.

i) Montrer que $f \circ \mathrm{Id}_A = \mathrm{Id}_B \circ f = f$.

ii) Montrer que la composition est *associative* : si $g : B \to C$ et $h : C \to D$ sont deux autres fonctions alors $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$.

Exercice 17 Notons f_n la fonction sur A définie par récurrence par : $f_0 = \mathrm{Id}_A$ et $f_{n+1} = f_n \circ f$. Montrer que pour tout n on a $f \circ f_n = f_{n+1}$. En déduire que $f_n = f^n$ pour tout n.

Exercice 18 La fonction vide de $\emptyset$ dans $\mathbb{N}$ est-elle injective ?

Exercice 19

i) Trouver une fonction injective $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ telle que pour tout $k \in \mathbb{N}$ on ait $f(2k + 1) < 2k + 1$.

ii) Soit $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$. On suppose que f vérifie : pour tout $n \in \mathbb{N}$ si $n > 0$ alors $f(n) < n$. Montrer que f n'est pas injective.

Exercice 20 Soit $f : D \to A$ une fonction.

i) Montrer que si f est injective et $E \subset D$ alors la fonction $f|_E$ est injective.

ii) Montrer que si f est injective alors pour tout sous-ensemble E de D on a $f^{-1}(f(E)) = E$.

iii) Montrer la réciproque : si $f^{-1}(f(E)) = E$ pour tout sous-ensemble E de D, alors f est injective.

Exercice 21 Montrer que si les fonctions $f : A \to B$ et $g : B \to C$ sont injectives alors $g \circ f$ est injective.

Exercice 22 Soit $f : A \to B$ une fonction ; montrer que f est injective ssi pour toutes parties X et Y de A on $f(X \cap Y) = f(X) \cap f(Y)$.

Exercice 23 La fonction vide de $\emptyset$ dans $\mathbb{N}$ est-elle surjective ?

Exercice 24 Montrer que si les fonctions $f : A \to B$ et $g : B \to C$ sont surjectives alors $g \circ f$ est surjective.

Exercice 25

i) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ (c'est à dire pour tout entier naturel non nul) il existe un unique entier k tel que $2^k \leq n < 2^{k+1}$.

ii) On définit la fonction $\log_2 : \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}$ par $\log_2(n) = k$ tel que $2^k \leq n < 2^{k+1}$. Montrer que $\log_2$ est surjective.

Exercice 26 Soit $f : X \to Y$ une fonction.

i) Notons f' la fonction $Y \to \mathcal{P}(X)$ définie par $f'(y) = f^{-1}(\{y\})$ pour chaque $y \in Y$. Montrer que si f est surjective alors f' est injective.

ii) À quelle condition sur f la fonction $f^{-1} : \mathcal{P}(Y) \to \mathcal{P}(X)$ est-elle injective ?

iii) À quelle condition sur f la fonction $f^{-1} : \mathcal{P}(Y) \to \mathcal{P}(X)$ est-elle surjective ?

Exercice 27 Quelle est la fonction inverse de Id_X ?

Exercice 28 Pourquoi faut-il l'hypothèses $A \neq \emptyset$ dans la 2ème partie du théorème ?

Exercice 29 Pour chacune des fonctions suivantes, dire si elle est injective, surjective et/ou bijective. Dans le cas où la fonction est bijective on donnera sa fonction inverse :

$$\begin{aligned} f_1 : \mathbb{N} &\to \mathbb{N} \\ x &\mapsto 0 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} f_2 : \mathbb{N} &\to \mathbb{N} \\ x &\mapsto x \end{aligned} \qquad \begin{aligned} f_3 : \mathbb{N} &\to \mathbb{Z} \\ x &\mapsto x \end{aligned} \qquad \begin{aligned} f_4 : \mathbb{N} &\to \mathbb{N} \\ x &\mapsto x+1 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} f_5 : \mathbb{Z} &\to \mathbb{Z} \\ x &\mapsto x+1 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} f_6 : \mathbb{Z} &\to \mathbb{Z} \\ x &\mapsto -x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_7 : \mathbb{Z} &\to \mathbb{Z} \\ x &\mapsto |x| \end{aligned} \qquad \begin{aligned} f_8 : \mathbb{Z} &\to \mathbb{N} \\ x &\mapsto |x| \end{aligned} \qquad \begin{aligned} f_9 : \mathbb{Z} &\to \mathbb{Z} \\ x &\mapsto 2x \end{aligned} \qquad \begin{aligned} f_{10} : \mathbb{Q} &\to \mathbb{Q} \\ x &\mapsto 2x \end{aligned} \qquad \begin{aligned} f_{11} : \mathbb{Q}^* &\to \mathbb{Q}^* \\ x &\mapsto 1/x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_{12} : \mathbb{Q} &\to \mathbb{Q}^+ \\ x &\mapsto x^2 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} f_{13} : \mathbb{Q}^+ &\to \mathbb{Q}^+ \\ x &\mapsto x^2 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} f_{14} : \mathbb{R} &\to \mathbb{R}^+ \\ x &\mapsto x^2 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} f_{15} : \mathbb{R}^+ &\to \mathbb{R}^+ \\ x &\mapsto x^2 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} f_{16} : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto x^3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_{17} : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \sin x \end{aligned} \qquad \begin{aligned} f_{18} : \mathbb{R} &\to [-1,1] \\ x &\mapsto \sin x \end{aligned} \qquad \begin{aligned} f_{19} : [-\pi/2,\pi/2] &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \sin x \end{aligned} \qquad \begin{aligned} f_{20} : [-\pi/2,\pi/2] &\to [-1,1] \\ x &\mapsto \sin x \end{aligned}$$

Exercice 30 Pour chacune des fonctions suivantes, dire si elle est injective, surjective et/ou bijective. Dans le cas où la fonction est bijective on donnera sa fonction inverse.

i) $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ définie par :
- $f(n) = n/2$ si n est pair ;
- $f(n) = (n-1)/2$ si n est impair.

ii) $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{N}$ définie par :
- $f(n) = 2n$ si $n \geq 0$;
- $f(n) = -2n - 1$ si $n < 0$.

iii) $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ définie par :
- $f(n) = n$ si n est un multiple de 3 ;
- $f(n) = n + 1$ si n est de la forme $3k + 1$;
- $f(n) = n - 1$ si n est de la forme $3k + 2$.

iv) $f : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ définie par $f(n,p) = (n+p)(n+p+1)/2 + p$.

v) $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ définie par :
- $f(0) = 0$;
- si $10^k \leq n < 10^{k+1}$ alors $f(n) = b_1 + b_2 10 + \cdots + b_k 10^{k-1} + b_0 10^k$ où les b_i sont les chiffres de l'écriture de n en base 10, c'est à dire que $n = b_0 + b_1 10 + \cdots + b_k 10^k$.

Exercice 31

i) Quelle est la fonction caractéristique de l'ensemble vide ? de l'ensemble E tout entier ?

ii) Supposons que $E = \mathbb{N}$ est l'ensemble des entiers naturels. Quelle est la fonction caractéristique de l'ensemble des entiers pairs ? de l'ensemble des carrés parfaits ?

iii) Soient F et G deux sous-ensembles de E et χ_F, χ_G leurs fonctions caractéristiques. Quelles sont, en fonction de χ_F et χ_G, les fonctions caractéristiques de F^c ? de $F \cup G$? de $F \cap G$.

Exercice 32 Soient n et p deux entiers naturels.

i) Montrer que $[1, n] \times [1, p]$ est en bijection avec $[1, np]$.

ii) On note $[1, n] + [1, p]$ l'ensemble $\{0\} \times [1, n] \cup \{1\} \times [1, p]$. Montrer que $[1, n] + [1, p]$ est en bijection avec $[1, n + p]$.