Maths Discrètes 1 ; exos du chapitre « Dénombrement, combinatoire élémentaire »

Exercice 1 Ici, X, Y désignent des ensembles finis.

i) Écrire en extension les ensembles $X \cup Y$ et $X \cap Y$ dans les cas suivants :

$$X = [1, 2], \qquad Y = [1, 3] \text{ ou } [2, 4] \text{ ou } [3, 5] \text{ ou } [4, 6].$$

ii) Retrouver la formule générale qui relie les cardinaux $|X|$, $|Y|$, $|X \cup Y|$, et $|X \cap Y|$.

iii) En déduire la formule pour $|X \cup Y|$ lorsque X et Y sont disjoints.

iv) En déduire la formule pour $|X \cup Y|$ lorsque $Y = \{y\}$ avec $y \notin X$.

v) En déduire la formule pour le cardinal du complémentaire de X dans Y lorsque $X \subset Y$.

vi) Que peut-on dire sur les cardinaux $|X|$ et $|Y|$ lorsque $X \subset Y$?

Exercice 2 Démontrer que si $X \subset [1, n]$, alors X est fini.
Indication : faire une récurrence sur n en utilisant l'exercice précédent.

Exercice 3 Ici, X, Y désignent des ensembles finis, et X^2 désigne le produit cartésien $X \times X$.

i) Écrire en extension les ensembles $X \times Y$, puis X^2 et X^3, ainsi que X^0, dans les cas suivants :

$$X = [1, 2], \qquad Y = [1, 3] \text{ ou } [3, 5].$$

ii) Retrouver la formule générale pour le cardinal $|X \times Y|$.

iii) Y a-t-il une formule spécifique pour $|X \times Y|$ lorsque X et Y sont disjoints ?

iv) Retrouver la formule générale pour le cardinal $|X^n|$ lorsque $n \in \mathbb{N}$.

v) Démontrer cette formule à partir de la précédente.

Exercice 4 Ici, X, Y désignent des ensembles finis, et Y^X désigne l'ensemble des fonctions $f : X \to Y$.

i) Donner toutes les fonctions de X vers Y (par des tables ou des diagrammes) dans les cas suivants :

$$X = [1, 2] \text{ et } Y = [1, 3], \qquad X = [1, 3] \text{ et } Y = [1, 2].$$

ii) Retrouver la formule générale pour le cardinal $\left|Y^X\right|$.

iii) En déduire la formule générale pour la cardinal $\left|[0, 1]^X\right|$, puis pour $|\mathcal{P}(X)|$.

iv) Construire une bijection entre les ensembles Y^n et $Y^{[1,n]}$.

Exercice 5 On note $\mathfrak{S}_n$ l'ensemble des permutations de $[1, n]$, c'est-à-dire des bijections $f : [1, n] \to [1, n]$.

i) Donner tous les éléments de $\mathfrak{S}_n$ (par des tables ou des diagrammes) dans les cas suivants :

$$n = 0, 1, 2, 3, 4.$$

ii) Retrouver la formule générale pour le cardinal $|\mathfrak{S}_n|$.

iii) Démontrer cette formule par récurrence.

Exercice 6 Soient n et p deux entiers naturels.

i) Montrer les cinq propriétés du théorème sur les cardinaux d'ensembles finis (théorème 4.1) mais en considérant cette fois les intervalles $[0, n]$ et $[0, p]$.

ii) Qu'est ce qui devient faux si on considère les intervalles $[2, n]$ et $[2, p]$?

Exercice 7 Montrer que :

i) Si X est en bijection avec Y et Y est fini alors X est fini.
ii) Pour tous entiers n, p, l'ensemble $[n, p]$ est fini.
iii) Si $X \subset [1, n]$ alors X est fini.
iv) Si $X \subset Y$ et Y est fini alors X est fini.
v) Si il y a une injection de X dans Y et Y est fini alors X est fini.
vi) Si il y a une surjection de X dans Y et X est fini alors Y est fini.
vii) Si X et Y sont finis alors $X \cup Y$ et $X \cap Y$ sont finis.

Exercice 8 Vérifier le théorème sur les cardinaux d'ensembles finis pour $X = [1, 2]$ et $Y = [1, 3]$.

Exercice 9 Soient X et Y deux ensembles finis disjoints.

i) Calculer le cardinal de l'ensemble $\mathcal{P}(X \cup Y)$.
ii) Calculer le cardinal de l'ensemble $\mathcal{P}(X) \times \mathcal{P}(Y)$.
iii) Qu'en déduire ?

Exercice 10 Soient X et Y deux ensembles finis. On sait que $|\mathcal{P}(X \times Y)| = 2^{|X|.|Y|} = 2^{|X|^{|Y|}} = |\mathcal{P}(X)|^{|Y|} = \left|\mathcal{P}(X)^Y\right|$. Il y a donc une bijection de l'ensemble des parties de $X \times Y$ dans l'ensemble des fonctions de Y dans les parties de X. Construire une telle bijection.

Exercice 11 Soient X et X' deux ensembles finis de même cardinal et p un entier. Montrer que $|\mathcal{P}_p(X)| = |\mathcal{P}_p(X')|$.

Exercice 12 Montrer que pour tout entier naturel n on a :

$$\sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} = 2^n$$

Exercice 13 Soit n un entier naturel.

i) Calculer la somme $\sum_{k=0}^{n} 2^k \binom{n}{k}$.
ii) Calculer la somme $\sum_{k=0}^{n} 2^{k-1} 3^{n-k+1} \binom{n}{k}$.
iii) Calculer la somme $\sum_{k=0}^{n} k \binom{n}{k}$

Indication : Dériver $(1 + x)^n$ de deux manières différentes.

Exercice 14 Démontrer que pour tous entiers naturels n et p tels que $p \leq n$ on a :

$$\binom{n}{p} = \frac{n}{p} \binom{n-1}{p-1} \qquad \text{si } p \neq 0,$$
$$\binom{n}{p+1} = \frac{n-p}{p+1} \binom{n}{p}$$

Exercice 15 Démontrer que pour tous entiers naturels n et p on a l'égalité :

$$\binom{n+1}{p+1} = \sum_{k=p}^{n} \binom{k}{p}$$

Exercice 16 On note $F_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n-k}{k}$. Montrer que pour tout entier naturel n on a $F_n + F_{n+1} = F_{n+2}$ (on en déduit que les F_n forment la fameuse *suite de Fibonacci*).

Exercice 17 Démontrer que pour tout entier naturel n on a l'égalité :

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}$$

Indication : On peut utiliser la formule du binôme et calculer $(x+y)^{2n}$ de deux manières différentes ; on peut également utiliser un raisonnement combinatoire.

Exercice 18 Soit P un polygone convexe à n sommets ($n \geq 3$). Une diagonale de P est une droite joignant deux sommets non consécutifs. Combien P a-t-il de diagonales distinctes ?

Exercice 19 Combien y-a-t-il de fonctions caractéristiques sur $\{0,1\}$? sur $\{0,1\}^2$? sur $\{0,1\}^k$ pour $k \in \mathbb{N}$?

Exercice 20 Un joueur lance un dé jusqu'à ce qu'il obtienne un même chiffre pour le deuxième fois. La suite de chiffres obtenue s'appelle un *résultat*.

i) Quel est le maximum de lancers possible ?
ii) Combien y-a-t-il de résultats comportant deux lancers exactement ?
iii) Combien y-a-t-il de résultats comportant trois lancers exactement ?
iv) Combien y-a-t-il de résultats possibles ?

Exercice 21 Soit Σ un ensemble de cardinal 3 ; les éléments de Σ seront appelés des *lettres* et notés a, b et c. Un *mot de longueur n sur* Σ est n-uplet d'éléments de Σ, c'est à dire un élément de Σ^n.

i) Combien y-a-t-il de mots de longueur n ?
ii) Combien y-a-t-il de mots de longueur inférieure ou égale à n ?
iii) Combien y-a-t-il de mots de longueur n tel que chacune des trois lettres apparait au moins un fois ?

Exercice 22 Soit $\varphi : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ définie par $\varphi(n,m) = (n+m)(n+m+1)/2 + m$.

i) Montrer que φ est bijective.
ii) En déduire que $\mathbb{N}^k$ est dénombrable pour tout entier naturel non nul k.
iii) On note $\mathbb{N}^\omega = \bigcup_{k \geq 1} \mathbb{N}^k$. Montrer que $\mathbb{N}^\omega$ est dénombrable.
iv) On note $\mathcal{P}^\omega$ l'ensemble des parties finies de $\mathbb{N}$. Montrer que $\mathcal{P}^\omega$ est dénombrable.

Exercice 23 Montrer que $\mathbb{Z}$ est dénombrable, puis que $\mathbb{Q}$ est dénombrable.