Maths Discrètes 1 ; exos du chapitre « Arithmétique »

Exercice 1 Montrer que si $p \mid n$ alors $p \mid n + kp$ pour tout $k \in \mathbb{Z}$.

Exercice 2 Montrer que si $p \mid m$ et $p \mid n$ alors pour tous $u, v \in \mathbb{Z}$, $p \mid um + vn$.

Exercice 3 Soient m, n, u, v des entiers et d un entier positif. Montrer que si $um + vn = d$ et d divise m et d divise n alors $d = m \wedge n$.

Exercice 4 Démontrer que la relation divise est une relation d'ordre. Qu'est ce qui devient faux si on considère non pas des entiers naturels mais des entiers ?

Exercice 5 Soit n un entier naturel ; montrer que n est premier ssi n n'admet aucun diviseur premier inférieur à $\sqrt{n}$.

Exercice 6 Soit m, n, p trois entiers et d leur PGCD, c'est à dire le plus grand diviseur de à la fois m, n, et p.

i) Montrer que $d = (m \wedge n) \wedge p = m \wedge n \wedge p$.

ii) Montrer qu'il existe des entiers u, v et w tels que $um + vn + wp = d$.

iii) Énoncer et démontrer la généralisation des deux questions précédentes à un nombre quelconque d'entiers.

Exercice 7 Soient m, n et p des entiers. Montrer que $pm \wedge pn = p(m \wedge n)$.

Exercice 8 Montrer que $a \wedge b = a \wedge (b + ax)$ pour tous entiers a, b, x.

Exercice 9 Soient a, b et c trois entiers. Montrer que si $b \wedge c = 1$ alors $ab \wedge c = a \wedge c$.

Exercice 10 Soient m et n deux entiers ; montrer que si u et v sont tels que $um + vn = m \wedge n$ alors u et v sont premiers entre eux.

Exercice 11 Montrer que si $n > 4$ alors n divise $(n-1)!$ ssi n n'est pas premier.

Exercice 12 Construire la suite (n_k) de l'algorithme d'Euclide en partant de $n_0 = 55$ et $n_1 = 34$.

Exercice 13 On dispose de deux bidons, l'un de 6 litres, l'autre de 11 litres, d'une bassine de plus de 50 litres et d'un robinet d'eau courante. Comment fait-on pour remplir la bassine avec exactement 13 litres d'eau ?

Exercice 14 Appliquer l'algorithme d'Euclide pour trouver les coefficients de Bezout de 55 et 34. Faire de même avec 55 et 36, puis 54 et 35.

Exercice 15 Trouver des entiers x et y tels que :

i) $283x + 1722y = 31$;

ii) $365x + 72y = 18$;

iii) $1111x + 2345y = 66$.

Exercice 16 Calculer les 10 premiers termes de la suite de Fibonacci.

Exercice 17 On note $\varphi = (1 + \sqrt{5})/2$ et $\bar{\varphi} = (1 - \sqrt{5})/2$.

i) Montrer que φ et $\bar{\varphi}$ sont les deux solutions de l'équation $x^2 = x + 1$.

ii) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $F_n = (\varphi^{n+1} - \bar{\varphi}^{n+1})/\sqrt{5}$.