Corrigé TD 1

J.-B. Angelelli

8 novembre 2006

Définitions

- Soit $(X, \leq)$ un ensemble ordonné et $(x, y, z) \in X$. On a $z = sup(x, y)$ si et seulement si les 3 propriétés suivantes sont vérifiées :

1. $x \leq z$
2. $y \leq z$
3. Soit $z' \in X$ tel que $x \leq z'$ et $y \leq z'$, alors on a $z \leq z'$

- Soit $(X, \leq)$ un ensemble ordonné et $(x, y, z) \in X$. On a $z = inf(x, y)$ si et seulement si les 3 propriétés suivantes sont vérifiées :

1. $z \leq x$
2. $z \leq y$
3. Soit $z' \in X$ tel que $z' \leq x$ et $z' \leq y$, alors on a $z' \leq z$

Exercice 7

On se place dans un treillis T.

Démontrer que $\vee$ est associative[1]

Il s'agit de démontrer que :

$$\forall (x, y, z) \in T, (x \vee y) \vee z = x \vee (y \vee z)$$

Démonstration

On note $s_1 = (x \vee y) \vee z$ et $s_2 = x \vee (y \vee z)$. On va démontrer dans un premier temps que $s_1 \leq s_2$ puis que $s_2 \leq s_1$.

- On a $x \leq s_2$ (1) (propriété 1. du sup)
- On a $y \leq y \vee z$ et $z \leq y \vee z$ (propriété 1. du sup) or $y \vee z \leq s_2$, ce qui fait que $y \leq s_2$ (2) et $z \leq s_2$ (3) (par transitivité de $\leq$)
- D'après (1) et (2), on a $x \leq s_2$ et $y \leq s_2$, d'où $x \vee y \leq s_2$ (4) (propriété 3. du sup)
- D'après (4) et (3), on a $x \vee y \leq s_2$ et $z \leq s_2$, d'où $(x \vee y) \vee z \leq s_2$ (propriété 3. du sup), c'est-à-dire $s_1 \leq s_2$.

On démontre de même que $s_2 \leq s_1$ et on a $s_1 = s_2$ et l'associativité est démontrée.

[1] à ne pas confondre avec la distributivité

Démontrer que pour tous x et y dans T, on a $x \wedge (x \vee y) = x$

Il s'agit ici d'une démonstration de borne inférieure, il faut démontrer que x vérifie les 3 propriétés de la définition de la borne inf vis-à-vis de x et $x \vee y$.

Démonstration

1. on a $x \leq x$ (évident, réflexivité de $\leq$)
2. on a $x \leq x \vee y$ (propriété 1. du sup)
3. Considérons $z' \in T$ tel que $z' \leq x$ et $z' \leq x \vee y$, on a alors $z' \leq x$ (immédiat, pas d'étape intermédiaire)

On a démontré que $x = inf(x, x \vee y)$, c'est-à-dire $x \wedge (x \vee y) = x$.

Démontrer que pour tous x de T, on a $x \vee \top = \top$

Il s'agit ici d'une démonstration de borne supérieure, il faut démontrer que $\top$ vérifie les 3 propriétés de la borne sup vis-à-vis de x et $\top$.

Démonstration

1. on a $x \leq \top$ (d'après la définition de $\top$)
2. on a $\top \leq \top$(évident, réflexivité de $\leq$)
3. Considérons $z' \in T$ tel que $\top \leq z'$ et $x \leq z'$, on a alors $\top \leq z'$ (immédiat, pas d'étape intermédiaire)

On a démontré que $x \vee \top = \top$.

Exercice 10

Montrer que tout élément d'un treillis booléen admet un unique complément

Considérons $x \in T$, on va démontrer que le complément de x existe et est unique.

Existence

Le treillis booléen est en particulier complémenté, ce qui fait que x admet au moins un complément[2].

Unicité

Le treillis booléen est en particulier distributif, nous allons voir que la distributivité du treillis implique l'unicité du complément[3]. Comme souvent dans les démonstration d'unicité, on suppose que x admet deux compléments y et z et on montre qu'on a alors $y = z$.
On a $x \vee y = \top(1)$, $x \vee z = \top(2)$, $x \wedge y = \bot(3)$, $x \wedge z = \bot(4)$.
Considérons la quantité $y \vee (x \wedge z)$. On a, d'après la distributivité du treillis,

$$y \vee (x \wedge z) = (y \vee x) \wedge (y \vee z)$$

d'où

$$y \vee \bot = \top \wedge (y \vee z)$$

d'où

$$y = y \vee z$$

[2] non unique si le treillis est seulement complémenté

[3] si il existe, ce qui n'est pas toujours le cas si le treillis est seulement distributif

Considérons la quantité $z \vee (x \wedge y)$. On a, d'après la distributivité du treillis,

$$z \vee (x \wedge y) = (z \vee x) \wedge (z \vee y)$$

d'où

$$z \vee \perp = \top \wedge (z \vee y)$$

d'où

$$z = z \vee y$$

Vu que $z \vee y = y \vee z$, on a $y = z$, et l'unicité est démontrée.

Remarque

Cette démonstration donne un outil très utile pour démontrer qu'un treillis N'EST PAS distributif, il suffit de trouver un élément qui admet deux compléments DISTINCTS.