

L2 Maths et Info
Mathématiques discrètes 2
18 janvier 2005

Durée : 3h - Responsable : L. Regnier

Documents et calculatrices non autorisés. Prévoir environ 1/4 d'heure par exo, 25 minutes au maximum.

Exercice 1 Soit T un treillis. On dit que T est *modulaire* si pour tous x, y et z dans T on a :

$$\text{si } x \leq z \text{ alors } x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge z.$$

Montrer que si T est distributif alors T est modulaire.

Exercice 2 Pour chacun des ensembles (d'ensembles) suivants que l'on suppose ordonné par inclusion, dessiner le diagramme de Hasse et dire s'il s'agit d'un treillis distributif et/ou complémenté. On justifiera les réponses dans les cas où celles-ci sont négatives.

- i) $\{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2, 3\}\}$;
- ii) $\{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}, \{1, 2, 3\}\}$.

Exercice 3 Donner une forme normale disjonctive pour chacune des fonctions booléennes suivantes :

- i) $f_1(a_0, a_1) = a_0 + a_1$;
- ii) $f_2(a_0, a_1, a_2) = a_0 + a_1 + a_2$;
- iii) $f_3(a_0, a_1, a_2, a_3) = a_0 + a_1 + a_2 + a_3$.

Exercice 4 Montrer que si B est une algèbre de Boole alors pour tout x dans B on a :

$$\text{si } x \leq x^c \text{ alors } x = \perp.$$

Exercice 5 Soit B une algèbre de Boole et x, y deux éléments de B . Montrer que

$$\text{si } (x \wedge y) \vee (x^c \wedge y^c) = \top \text{ alors } x = y.$$

Indication : on pourra calculer $x \wedge ((x \wedge y) \vee (x^c \wedge y^c))$ et $y \wedge ((x \wedge y) \vee (x^c \wedge y^c))$.

Exercice 6 Donner la définition d'un graphe non orienté, du degré d'un sommet et l'énoncé du théorème d'existence d'un cycle eulérien.

Exercice 7 Soit G un graphe non orienté que l'on suppose connexe et sans cycle. On note n le nombre de sommets de G .

- i) Quel est, en fonction de n , le nombre d'arêtes de G (on pourra donner une indication sur la façon de démontrer la réponse) ?
- ii) Que se passe-t-il si on supprime une arête de G ?

Exercice 8 Soit A la matrice d'adjacence :

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

- i) Dessiner le graphe (orienté) G correspondant à la matrice A .
- ii) Ce graphe est-il connexe (au sens orienté) ?
- iii) Donner la matrice d'adjacence du graphe non-orienté correspondant à G .

Exercice 9 Trouver un automate, puis en déduire un automate déterministe (si le premier ne l'est pas déjà) pour chacun des langages décrits par les expressions régulières suivantes :

- i) $(a + ab)^*$;
- ii) $(a + ab + abb)^*$;
- iii) $(ab^*)^*$.