

**L2 Maths et Info**  
**Mathématiques discrètes 2**  
**juin 2005**

Durée : 2h - Responsable : L. Regnier

Documents et calculatrices non autorisés. Prévoir environ 20 minutes par exo, 30 minutes au (grand) maximum.

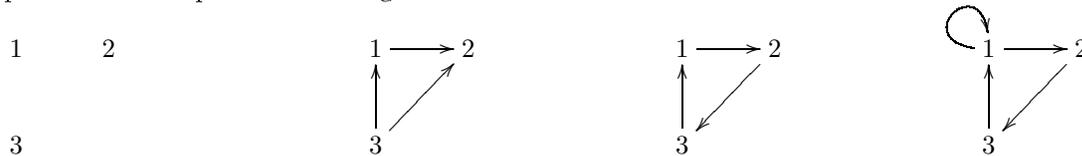
**Exercice 1** On se place dans une algèbre de Boole  $B$ ;  $x$ ,  $y$  et  $z$  sont trois éléments quelconques de  $B$ .

- i) Montrer que si  $x \leq y$  alors  $x \wedge z \leq y \wedge z$  et  $x \vee z \leq y \vee z$ ;
- ii) Montrer que :  $z \leq x^c \vee y$  ssi  $z \wedge x \leq y$ .

**Exercice 2** On note  $\mathbb{N}$  l'ensemble des entiers positifs ou nuls. On dit qu'une partie  $X$  de  $\mathbb{N}$  est *co-finie* si son complémentaire  $X^c$  dans  $\mathbb{N}$  est fini.

- i) Donner un exemple de partie co-finie de  $\mathbb{N}$  et un exemple de partie de  $\mathbb{N}$  qui n'est ni finie, ni co-finie.
- ii) L'ensemble des parties finies de  $\mathbb{N}$ , ordonné par inclusion, est-il une algèbre de Boole (justifier sa réponse) ?
- iii) L'ensemble des parties finies et co-finies de  $\mathbb{N}$ , ordonné par inclusion, est-il une algèbre de Boole (justifier sa réponse) ?

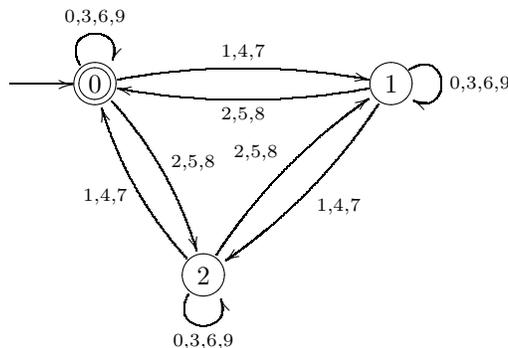
**Exercice 3** Pour chacun des graphes  $G$  à trois sommets ci-dessous, écrire la matrice d'adjacence  $A_G$ , puis calculer les puissances de  $A_G$ .



**Exercice 4** On se place dans le monoïde des mots sur l'alphabet à deux lettres  $\{a, b\}$ . Pour chacun des langages  $L$  suivants donner une expression régulière, puis un automate  $A_L$ , puis, dans le cas où  $A_L$  n'est pas déterministe, un automate déterministe  $D_L$  :

- le langage des mots dont la dernière lettre est la lettre  $a$  ;
- le langage des mots dont l'avant-dernière lettre est la lettre  $a$  ;
- le langage des mots dont l'antépénultième<sup>1</sup> lettre est la lettre  $a$ .

**Exercice 5** On se place dans le monoïde  $D$  des mots sur l'alphabet  $\{0, 1, \dots, 9\}$ . Tout mot de  $D$  peut être vu comme l'écriture en base 10 d'un entier (aux zéros initiaux près). Quels sont les entiers reconnus par l'automate ci-dessous ?



<sup>1</sup> *antépénultième* : avant la pénultième, qui elle même est l'avant-dernière ; si  $n$  est la longueur du mot, et en numérotant les lettres de 1 à  $n$ , la dernière lettre a le numéro  $n$ , l'avant-dernière le numéro  $n - 1$  et l'antépénultième le numéro  $n - 2$ .