Exercice 1

Ensemble ordonné

Un ensemble ordonné est un ensemble X muni d'une relation $\leq$ qui est :

réflexive Pour tout $x \in X$, on a $x \leq x$.

antisymétrique Soit $x, y \in X$, si $x \leq y$ et $y \leq x$ alors $x = y$.

transitive Soit $x, y, z \in X$, si $x \leq y$ et $y \leq z$ alors $x \leq z$.

Treillis

Un treillis est un ensemble ordonné T tel que toute paire d'éléments $\{x, y\}$ admet une borne supérieure $x \vee y$ et une borne inférieure $x \wedge y$ dans T. Certains auteurs demandent en plus qu'un treillis admette un plus grand et un plus petit élément.

On a $z = x \vee y$ si et seulement si les trois propriétés suivantes sont vérifiées :

1. $x \leq z$
2. $y \leq z$
3. Soit $z' \in T$, tel que $x \leq z'$ et $y \leq z'$, on a alors $z \leq z'$.

On a $z = x \wedge y$ si et seulement si les trois propriétés suivantes sont vérifiées :

1. $z \leq x$
2. $z \leq y$
3. Soit $z' \in T$, tel que $z' \leq x$ et $z' \leq y$, on a alors $z' \leq z$.

Treillis booléen

Un treillis booléen est un treillis admettant un plus petit élément $\perp$, un plus grand élément $\top$ et vérifiant pour tout x, y, z dans T :

distributivité $x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z)$ (on peut montrer que dès que cette relation est satisfaite dans un treillis alors l'autre distributivité l'est aussi : $x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$) ;

complémentaire $\forall x \in T, \exists y \in T$ tel que $x \vee y = \top$ et $x \wedge y = \perp$

Anneau

Un anneau $(A, +, \times)$ est un ensemble A muni de deux lois internes $+$ et $\times$ telles que :

- $(A, +)$ est un groupe abélien (ou commutatif), c'est-à-dire :
  - $+$ est associative, commutative

$$\forall x, y, z \in A,\ (x + y) + z = x + (y + z)$$

$$\forall x, y \in A,\ x + y = y + x$$

    - Il existe un élément neutre, noté 0, pour la loi +

$$\forall x \in A,\ x + 0 = 0 + x = x$$

    - Tout élément x de A admet un opposé y pour +

$$x + y = y + x = 0$$

- $\times$ est associative

$$\forall x, y, z \in A\ (xy)z = x(yz)$$

- $\times$ est distributive sur +

$$\forall x, y, z \in A,\ x(y + z) = xy + xz$$

$$\forall x, y, z \in A,\ (x + y)z = xz + yz$$

Anneau booléen

Un anneau booléen est un anneau commutatif unitaire dans lequel tous les points sont idempotents pour la multiplication, c'est-à-dire qu'on a, *en plus des propriétés définissant l'anneau* :

- Il existe un élément neutre 1 pour $\times$

$$\forall x \in A,\ 1x = x1 = x$$

- $\times$ est commutative

$$\forall (x, y) \in A,\ xy = yx$$

- Idempotence des éléments pour la multiplication

$$\forall x \in A,\ xx = x$$

Exercice 2

$\mathbb{N}$ muni de son ordre usuel

1. Il s'agit d'un ordre total, en effet pour tous $n, n' \in \mathbb{N}$, on a $n \leq n'$ ou $n' \leq n$.
2. Un ensemble totalement ordonné a une borne supérieure et une borne inférieure pour chaque paire d'éléments ; $\mathbb{N}$ est donc un treillis. On peut remarquer toutefois qu'il n'a pas de plus grand élément.
3. Pour tous $n, n' \in \mathbb{N}$, on a $n \vee n' = \max(n, n')$ et $n \wedge n' = \min(n, n')$

$\mathbb{N}^2$ muni de la relation $\leq$ définie par $(n,m) \leq (n',m')$ ssi $n < n'$ ou $(n = n'$ et $m \leq m')$

C'est un ordre total donc un treillis comme avant. Et comme avant il n'a pas de plus grand élément. Dans un ensemble totalement ordonné, le sup de deux éléments est le plus grand des deux éléments, l'inf est le plus petit des deux éléments. C'est-à-dire

- Si $n < n'$ ou ($n = n'$ et $p \leq p'$), on a $(n,m) \vee (n',m') = (n',m')$ et $(n,m) \wedge (n',m') = (n,m)$
- Si $n' < n$ ou ($n = n'$ et $p' \leq p$), on a $(n,m) \vee (n',m') = (n,m)$ et $(n,m) \wedge (n',m') = (n',m')$

Pour voir que l'ordre est total on raisonne par cas : soient (n,m) et (n',m') alors comme n et n' sont comparables (l'ordre sur les entiers est total), on a trois cas :

- $n < n'$ auquel cas $(n,m) \leq (n',m')$ par définition ;
- $n > n'$ auquel cas $(n,m) \geq (n',m')$ par définition ;
- $n = n'$, comme m et m' sont comparables, il y a alors deux possibilités pour m et m' :
  - $m \leq m'$ auquel cas $(n,m) \leq (n',m')$ par définition ;
  - $m > m'$ auquel cas $(n,m) > (n',m')$ par définition.

Dans tous les cas on a bien vérifié que (n,m) et (n',m') sont comparables.

$\mathbb{N}^2$ muni de la relation $\leq$ définie par $(n,m) \leq (n',m')$ ssi $n \leq n'$ et $m \leq m'$

1. Considérons les couples $(2,3)$ et $(1,4)$. Nous n'avons ni $(2,3) \leq (1,4)$ (puisque $2 \not\leq 1$), ni $(1,4) \leq (2,3)$ (puisque $4 \not\leq 3$). Donc l'ordre n'est pas total.

2. Soit $n_i = \min(n,n')$, $m_i = \min(m,m')$, $n_s = \max(n,n')$, $m_s = \max(m,m')$.
   On va démontrer que $(n_i,m_i) = (n,m) \wedge (n',m')$ et que $(n_s,m_s) = (n,m) \vee (n',m')$.
   On a :
   - $(n_i,m_i) \leq (n,m)$ (puisque $n_i \leq n$ et $m_i \leq m$)
   - $(n_i,m_i) \leq (n',m')$ (puisque $n_i \leq n'$ et $m_i \leq m'$)
   - Soit (n'',m'') tel que $(n'',m'') \leq (n,m)$ et $(n'',m'') \leq (n',m')$, on a alors $n'' \leq n$ et $n'' \leq n'$ donc $n'' \leq min(n,n') = n_i$. De même, on obtient $m'' \leq m_i$, ce qui fait que finalement $(n'',m'') \leq (n_i,m_i)$.

   On a donc démontré que $(n_i,m_i) = (n,m) \wedge (n',m')$.

   Un raisonnement identique montre que $(n_s,m_s) = (n,m) \vee (n',m')$.

3. Tout couple d'éléments de $\mathbb{N}^2$ admet une borne inférieure et une borne supérieure et $\mathbb{N}^2$ muni de cette relation d'ordre est donc un treillis.

Exercice 3

Ensemble $\mathcal{B}$

$\mathcal{B}$ est l'algèbre de Boole constitué par l'ensemble $\{0,1\}$ muni de la relation d'ordre $\leq$.

Cardinal de $\mathcal{B}^p$

$|\mathcal{B}^p| = |\mathcal{B}|^p = 2^p$

Cardinal de $\mathcal{F}_{n+1}$

Rappelons que $\mathcal{F}_{n+1}$ désigne l'ensemble des fonctions booléenes d'arité $n+1$, c'est-à-dire les applications de $\mathcal{B}^{n+1}$ dans $\mathcal{B} = \{0,1\}$. On a donc $|\mathcal{F}_{n+1}| = |\mathcal{B}|^{|\mathcal{B}^{n+1}|} = 2^{2^{n+1}}$.

Exercice 4

- Si $x \leq y$ on a $x \vee y = y$ donc $x^c \vee y = x^c \vee (x \vee y) = (x^c \vee x) \vee y = \top \vee y = \top$ par associativité de $\vee$ et parceque $\top$ est absorbant pour $\vee$.
- Si $x^c \vee y = \top$ alors $x \wedge (x^c \vee y) = x \wedge \top$. Mais $\top$ est neutre pour $\wedge$ donc $x \wedge \top = x$; d'autre part, par distributivité on a $x \wedge (x^c \vee y) = (x \wedge x^c) \vee (x \wedge y) = \perp \vee (x \wedge y) = x \wedge y$ car $\perp$ est neutre pour $\vee$. On a donc montré que $x \wedge y = x$ ce qui est équivalent à $x \leq y$.

Exercice 5

On construit les tables de vérités de $f_1$et f_2. Attention de ne pas confondre $+$ avec $\vee$

a	b	c	$f_1(a,b,c)$	$f_2(a,b,c)$
0	0	0	0	0
0	0	1	1	0
0	1	0	0	0
0	1	1	1	1
1	0	0	1	1
1	0	1	0	1
1	1	0	0	1
1	1	1	1	0

D'où les formes normales canoniques disjonctives

$$f_1(a,b,c) = a^c b^c c \vee a^c bc \vee ab^c c^c \vee abc$$
$$f_2(a,b,c) = a^c bc \vee ab^c c^c \vee ab^c c \vee abc^c$$

et les formes normales canoniques conjonctives

$$\begin{aligned} f_1(a,b,c) &= (a \vee b \vee c) \wedge (a \vee b^c \vee c) \wedge (a^c \vee b \vee c^c) \wedge (a^c \vee b^c \vee c) \\ f_2(a,b,c) &= (a \vee b \vee c) \wedge (a \vee b \vee c^c) \wedge (a \vee b^c \vee c) \wedge (a^c \vee b^c \vee c^c) \end{aligned}$$