

L2 Maths et Info
Mathématiques discrètes 2
Partiel du 9 novembre 2005
Durée : 2h - Responsable : L. Regnier

Documents et calculatrices non autorisés. Prévoir environ 20 minutes par exo, 30 minutes au (grand) maximum.

Exercice 1 Donner les définitions de :

- i) ensemble ordonné;
- ii) treillis;
- iii) treillis booléen;
- iv) anneau;
- v) anneau booléen.

Par exemple on dira qu'un groupe est un ensemble G muni d'une opération binaire $x, y \mapsto xy$, et d'un élément 1 vérifiant :

associativité : pour tous $x, y \in G$, $(xy)z = x(yz)$;

élément neutre : pour tout $x \in G$, $x1 = 1x = x$;

inverse : pour tout x dans G , il existe un y dans G tel que $xy = yx = 1$.

Exercice 2 Pour chacun des ensembles ordonnés suivants dire s'il s'agit d'un ordre total, d'un treillis et si c'est le cas, donner une formule explicite pour l'inf et le sup :

- i) l'ensemble \mathbb{N} muni de son ordre usuel;
- ii) l'ensemble \mathbb{N}^2 des couples d'entiers ordonné par : $(n, m) \leq (n', m')$ ssi $n < n'$ ou bien $n = n'$ et $m \leq m'$;
- iii) l'ensemble \mathbb{N}^2 ordonné par : $(n, m) \leq (n', m')$ ssi $n \leq n'$ et $m \leq m'$.

Exercice 3

- i) Quel est la définition du cours de l'ensemble \mathcal{B} ?
- ii) Combien l'ensemble \mathcal{B}^p a-t-il d'éléments?
- iii) Combien l'ensemble \mathcal{F}_{n+1} des fonctions booléennes d'arité $n + 1$ a-t-il d'éléments?

Exercice 4 Soit B une algèbre de Boole. Montrer que, pour tous éléments x, y de B on a : $x \leq y$ ssi $x^c \vee y = \top$.

Exercice 5 Donner les formes normales disjonctives des fonctions booléennes d'arité 3 suivantes :

- i) f_1 définie par $f_1(a, b, c) = c$ si $a \leq b$, $1 + c$ sinon;
- ii) f_2 définie par $f_2(a, b, c) = a + bc$;