

L2 Maths et Info
Mathématiques discrètes 2
Examen du 12 janvier 2006
Durée : 3h - Responsable : L. Regnier

Documents et calculatrices non autorisés. Prévoir en moyenne 30 minutes par exo, ne pas passer plus de 40 minutes sur le même exo.

Notation : si n , m et p sont des entiers, on note $n = m(p)$ pour n égal m modulo p , c'est à dire : il existe un entier relatif k tel que $n - m = kp$.

Exercice 1 Soit B une algèbre de Boole et b_1, b_2 deux éléments de B . On note $i(b_1, b_2) = b_1^c \vee b_2$.

- i) Montrer que $i(i(b_1, b_2), b_1), b_1) = \top$ quels que soient les éléments b_1 et b_2 de B .
- ii) Montrer que $b_1 \leq b_2$ ssi $i(b_1, b_2) = \top$.
- iii) On note $e(b_1, b_2) = i(b_1, b_2) \wedge i(b_2, b_1)$. Montrer que $e(b_1, b_2) = (b_1 + b_2)^c$.

Exercice 2 On rappelle que dans un graphe orienté, le degré d'un sommet est la somme du degré incident et du degré émergent. Dans les questions qui suivent, n représente un entier positif ou nul quelconque.

- i) Trouver un graphe orienté à 7 sommets dont les degrés sont respectivement : 6, 3, 2, 2, 1, 1, 1.
- ii) Existe-il un graphe dont les degrés des sommets soient respectivement : 7, 5, 3, 2, 2 (donner une justification simple) ?
- iii) Montrer qu'il existe un graphe à n sommets tous de degré 1 ssi n est pair.
- iv) Montrer qu'il existe un graphe à n sommets tous de degré pair.
- v) Dédire de ce qui précède qu'il existe un graphe à n sommets dont les degrés respectifs sont $d_1, \dots, d_n$ ssi la somme des d_i est paire.

Exercice 3 On rappelle que le diagramme de Hasse d'une relation d'ordre est un graphe *orienté* (sur le dessin les arêtes sont orientées de bas en haut). On dispose une arête de x vers y si : $x \leq y$, $x \neq y$ mais il n'y a aucun z distinct de x et y entre x et y .

- i) Donner la matrice d'adjacence du diagramme de Hasse de l'algèbre de Boole $\mathcal{B} = \{0, 1\}$.
- ii) Même question pour l'algèbre de Boole $\mathcal{B}^2$.
- iii) Même question pour l'algèbre de Boole $\mathcal{B}^3$.

Exercice 4 On se place dans le monoïde Σ^* où Σ est l'alphabet $\{a, b\}$. Pour chacun des langages suivants on demande de donner une expression régulière, puis de construire un automate déterministe.

- i) L_1 est le langage des mots de longueur paire : $L_1 = \{u \in \Sigma^*, |u| = 0(2)\}$.
- ii) L_2 est le langage des mots dont la longueur est égale à 1 modulo 4 : $L_2 = \{u \in \Sigma^*, |u| = 1(4)\}$.
- iii) L_3 est le langage des mots dont le nombre de a est égal à 2 modulo 4 : $L_3 = \{u \in \Sigma^*, |u|_a = 2(4)\}$.
- iv) $L_4 = L_1 \cap L_2$.
- v) $L_5 = L_1 \cap L_3$.

Exercice 5 Soit le langage L des mots dont la longueur est une puissance de 2 : $L = \{u \in \Sigma^*, \exists k \in \mathbb{N}, |u| = 2^k\}$. Montrer que L n'est pas régulier.

Exercice 6 On rappelle le théorème d'arithmétique suivant : soit n un entier et $(b_0, \dots, b_k)$ le k -uplet de ses chiffres en base 2 (c'est à dire que l'on a $n = b_0 + b_1 \times 2 + \dots + b_k \times 2^k$ et que chaque b_i est égal à 0 ou 1). Alors n est une multiple de 3 si et seulement si la somme alternée des b_i modulo 3 est nulle : $b_0 - b_1 + b_2 - \dots + (-1)^k b_k = 0(3)$.

- i) Écrire les nombres 23, 24, 27, 30, 31, et 32 en base 2 et vérifier le théorème sur chaque exemple.
- ii) Construire un automate déterministe qui, étant donné un mot sur l'alphabet 0, 1 reconnaît ce mot ssi le mot est la représentation en base 2 d'un multiple de 3.

Indication : l'automate a 6 états, que l'on pourra appeler $0p, 0i, 1p, 1i, 2p, 2i$, où 0, 1 et 2 sont les trois restes modulo 3, et p et i veulent dire *paire* et *impaire*.