

L2 Maths et Info
Mathématiques discrètes 2
Examen du 15 juin 2006
Durée : 3h - Responsable : L. Regnier

Documents et calculatrices non autorisés. Prévoir en moyenne 30 minutes par exo, ne pas passer plus de 40 minutes sur le même exo.

Exercice 1 Soit B une algèbre de Boole et b_1, b_2 deux éléments de B . On note $i(b_1, b_2) = b_1^c \vee b_2$. Montrer que pour tout $b_1, b_2, b_3 \in B$ on a :

- i) $(b_1 \wedge b_2) = i(i(b_1, i(b_2, \perp)), \perp)$;
- ii) $i(b_1, i(b_2, b_3)) \leq i(i(b_1, b_2), i(b_1, b_3))$.

Exercice 2 On reprend les notations de l'exo précédent et on suppose que B est l'algèbre $\{0, 1\}$. Donner les formes normales disjonctives des fonctions booléennes définies ci-dessous :

- i) $f_1(x, y) = i(x, y)$;
- ii) $f_2(x, y, z) = i(x, i(y, z))$;
- iii) $f_3(x, y, z) = i(i(x, y), z)$;
- iv) $f_4(x, y, z) = i(i(x, i(y, z)), i(i(x, y), i(x, z)))$.

Exercice 3 Soit X un ensemble non vide et R un sous-ensemble de X^2 , c'est à dire un ensemble de couples ; on dit que R est une relation binaire sur X et on note $x R y$ pour $(x, y) \in R$. On appelle *graphe de R* , noté G_R , le graphe orienté dont les sommets sont les éléments de X et tel que pour tout x et y dans X , il y a une arête de x vers y ssi $x R y$.

On pose $X = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$. Pour chacune des relations suivantes sur X , dessiner son graphe et donner sa matrice d'adjacence.

- i) $x R_1 y$ ssi $x + y$ est pair ;
- ii) $x R_2 y$ ssi $2x + y$ est pair ;
- iii) $x R_3 y$ ssi $4x \leq y$;
- iv) $x R_4 y$ ssi il existe k tel que $x/2^k$ est pair¹ et $y = x + 2^k$;

Exercice 4 On se place dans le monoïde Σ^* où Σ est l'alphabet $\{a, b\}$. Si u et v sont des mots on dit que u *contient* v s'il existe des mots v_1 et v_2 tels que $u = v_1 v v_2$.

i) Rappeler les définitions de préfixe et de suffixe. Montrer que si v est un préfixe (ou un suffixe) de u alors u contient v . Donner un exemple de u et de v tels que u contient v mais v n'est ni préfixe, ni suffixe de u .

ii) Montrer que u contient v ssi il existe un préfixe u_1 de u tel que v est un suffixe de u_1 .

Exercice 5 On reprend les définitions et les notations de l'exo précédent. Pour chacun des langages suivants on demande de donner une expression régulière, puis de construire un automate déterministe.

- i) L_1 est le langage des mots se terminant par le mot aba ;
- ii) L_2 est le langage des mots contenant le mot aba ;
- iii) L_3 est le langage des mots se terminant par aba ou bab ;
- iv) L_4 est le langage des mots contenant aba ou bab .

¹ $x/2^k$ représente ici le quotient de la division euclidienne de x par 2^k .