

L2 Maths et Info
Mathématiques discrètes 2
Examen du 19 juin 2007
Durée : 3h - Responsable : L. Regnier

Documents et calculatrices non autorisés. Prévoir en moyenne 30 minutes par exo, ne pas passer plus de 40 minutes sur le même exo.

Exercice 1 Soit T et T' deux treillis et f une application de T dans T' .

i) On suppose que f préserve les inf, c'est à dire que pour tous x, y dans T on a $f(x \wedge_T y) = f(x) \wedge_{T'} f(y)$. Montrer qu'alors f est croissante, c'est à dire que pour tous x, y dans T on a : si $x \leq_T y$ alors $f(x) \leq_{T'} f(y)$.

ii) Même question mais en supposant cette fois que f préserve les sup.

Exercice 2 Soit B une algèbre de Boole. Montrer que pour tous x, y dans B si $(x^c \vee y) \wedge (x \vee y^c) = \top$ alors $x = y$.

Exercice 3 Soit R une relation binaire sur un ensemble X . On rappelle que le graphe de R est le graphe (orienté) G_R dont les sommets sont les éléments de X et tel qu'il y a une arête entre x et y ssi $x R y$.

Soit $X = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$.

i) Pour chacune des relations suivantes, dessiner son graphe et donner sa matrice d'adjacence :

- $x R y$ ssi $x = y$;
- $x R y$ ssi $x \leq y$;
- $x R y$ ssi $y = x + 1$;
- $x R y$ ssi x divise y ;
- $x R y$ ssi $x + y$ est pair.

ii) Pour chacune des relations ci-dessus, dire s'il s'agit d'une relation d'ordre, et si c'est le cas dessiner son diagramme de Hasse.

iii) Si la relation R est réflexive, le graphe G_R possède une boucle en chaque sommet. Similairement que peut on dire de G_R si la relation R est

- symétrique ;
- transitive ;
- une relation d'équivalence ;
- une relation d'ordre.

Exercice 4 On considère les mots sur l'alphabet à deux lettres a et b .

i) Construire un automate déterministe pour le langage L défini par l'expression régulière $(a + b)^*abb(a + b)^*$ (L est le langage des mots contenant abb).

ii) Construire un automate déterministe reconnaissant le langage L_0 défini par l'expression régulière $(a + b)^*abb$ (L_0 est le langage des mots se terminant par abb).

iii) Construire un automate déterministe reconnaissant le langage L' défini par l'expression régulière $(a + b)^*baab(a + b)^*$ (L' est le langage des mots contenant $baab$).

iv) Construire une expression régulière et un automate déterministe pour le langage $L \cap L'$ des mots contenant à la fois abb et $baab$.