

**L2 Maths et Info**  
**Mathématiques discrètes 2**  
**Partiel du 22 octobre 2007**  
Durée : 2h - Responsable : L. Regnier

Documents et calculatrices non autorisés. Prévoir environ 20 minutes par exo, 30 minutes au (grand) maximum.

**Exercice 1**

- i) Rappeler les définitions de relation d'ordre, de borne inférieure, de treillis et de treillis booléen.
- ii) Énoncer et démontrer les lois de de Morgan dans les treillis booléens.
- iii) Rappeler la démonstration que  $x + x = 0$  dans un anneau de Boole.

**Exercice 2** Soit  $A$  une algèbre de Boole et  $x, y$  deux éléments de  $A$ .

- i) Montrer que  $(x \wedge y^c) \vee (x^c \wedge y) = (x \vee y) \wedge (x \wedge y)^c$ .
- ii) Montrer que  $x \wedge y \leq x \vee y$ .
- iii) En déduire que si  $x + y = x \vee y$  alors  $x \wedge y = \perp$ .

**Exercice 3** Soit  $T$  un treillis.

- i) Soient  $x_1, x_2, x_3 \in T$ ; montrer qu'il existe un plus grand minorant commun à  $x_1, x_2$  et  $x_3$ , que l'on appellera donc la borne inférieure de  $x_1, x_2$  et  $x_3$ .
- ii) Soit  $n$  un entier positif non nul. Donner la définition de la borne inférieure de  $n$  éléments  $x_1, \dots, x_n \in T$  et montrer que cette borne existe toujours.
- iii) En déduire que tout treillis fini a un plus petit élément.

**Exercice 4** Soit  $T$  un treillis fini et  $f : T \rightarrow T$  une fonction croissante. On pose  $A = \{x \in T, f(x) \leq x\}$ .

- i) Montrer que  $A$  est stable par  $f$ , c'est-à-dire que pour tout  $x \in A$ ,  $f(x) \in A$ .
- ii) Montrer que  $A$  est stable par borne inférieure, c'est à dire que pour tous  $x, y \in A$  on a  $x \wedge y \in A$ .
- iii) En déduire que  $A$  a un plus petit élément  $a$  et que c'est un point fixe pour  $f$ , c'est à dire que  $f(a) = a$ .