Université de la Méditerranée
Faculté des sciences de Luminy

Licence deuxième année
Année universitaire 2004-2005

Mathématiques discrètes 2

Feuille d'exercices 1

Exercice 1 Pour chacune des relations binaires sur $\mathbb{N}^2$ suivantes, dire s'il s'agit d'une relation d'ordre, si elle est totale, si elle a des points minimaux, un point minimum, des points maximaux, un point maximum, des sups, des infs, quels sont les points qui ont un successeur, un prédécesseur :

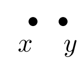
- $(n, p) \le (n', p')$ ssi $n \le n'$ et $p \le p'$;
- $(n, p) \le (n', p')$ ssi $n = n'$ et $p \le p'$;
- $(n, p) \le (n', p')$ ssi $n \le n'$ ou $p \le p'$;
- $(n, p) \le (n', p')$ ssi $n < n'$ ou, $n = n'$ et $p \le p'$;
- $(n, p) \le (n', p')$ ssi $n + p \le n' + p'$.

Exercice 2 Montrer que, dans un groupe commutatif, l'élément neutre est unique. De même avec l'inverse d'un élément. A-t-on utilisé toutes les propriétés de la structure de groupe commutatif ?

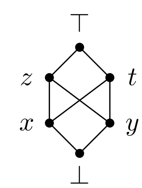
Exercice 3 Dire si les diagrammes de Hasse qui suivent correspondent à des treillis et, si oui, s'ils sont distributifs et/ou complémentés :

T_1

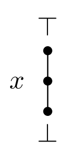
T_2



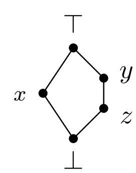
T_3



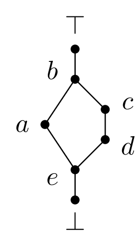
T_4



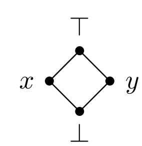
T_5



T_6



T_7



T_8

Exercice 4 Soit E un ensemble. Pour tout entier naturel n, on note $[n]$ l'ensemble $\{0, 1, \ldots, n\}$ et $[n]^E$ celui des applications de E dans $[n]$. Si f et g sont deux telles applications, on note $f \le g$ si, pour tout élément x de E, on a $f(x) \le g(x)$. Montrer que, muni de cette relation, l'ensemble $[n]^E$ est un treillis distributif. Est-il complémenté ? En déduire que l'ensemble $\mathcal{P}(E)$ formé des parties de E, muni de la relation d'inclusion, est un treillis booléen.

Exercice 5 Montrer que, dans un ensemble ordonné, la borne inférieure de deux éléments, si elle existe, est unique. En déduire que c'est aussi le cas pour la borne supérieure.

Exercice 6 Soit T un treillis. On fixe deux éléments x et y de T. Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes :

1. $x \leq y$;
2. $x \wedge y = x$;
3. $x \vee y = y$.

Exercice 7 Soit T un treillis. Montrer que les opérations *borne supérieure* et *borne inférieure* sont associatives, commutatives et vérifient les propriétés suivantes :

1. Pour tous x et y dans T :
$$x \wedge (x \vee y) = x \quad \text{et} \quad x \vee (x \wedge y) = x.$$
2. Pour tout élément x de T :
$$x \wedge \top = x, \quad x \vee \top = \top, \quad x \wedge \bot = \bot, \quad x \vee \bot = x.$$

Exercice 8 On considère un ensemble E, contenant au moins deux éléments notés $\top$ et $\bot$ et muni de deux opérations binaires $\wedge$ et $\vee$ associatives, commutatives et vérifiant les propriétés (a) et (b) de l'exercice 7. On définit la relation binaire $\leq$ sur E en posant $x \leq y$ si $x \wedge y = x$. Montrer que E, muni de cette relation, est un treillis.

Exercice 9 Soit T un treillis. Montrer que, si $\wedge$ est distributif par rapport à $\vee$, alors $\vee$ est distributif par rapport à $\wedge$. En déduire la réciproque.

Exercice 10 Montrer que tout élément d'un treillis booléen admet un unique complément. Est-ce vrai dans tout treillis complémenté ?

Exercice 11 Soient T un treillis distributif et x, y et z dans T. On suppose que :
$$x \wedge z = y \wedge z \quad \text{et} \quad x \vee z = y \vee z.$$
Montrer que $x = y$. L'hypothèse de distributivité est-elle nécessaire ?

Exercice 12 Soit T un treillis booléen. Démontrer les *lois de de Morgan*, c'est-à-dire que, pour tous x et y dans T, les équations suivantes sont vérifiées :
$$(x \wedge y)^c = x^c \vee y^c \quad \text{et} \quad (x \vee y)^c = x^c \wedge y^c.$$

Exercice 13 Montrer que tout treillis booléen peut être muni d'une structure d'anneau booléen et réciproquement. En déduire que, pour tout ensemble E, l'ensemble $\mathcal{P}(E)$ de ses parties peut être muni d'une structure de groupe commutatif.

Exercice 14 On rappelle que l'ensemble $\mathbb{N}$ des entiers naturels, muni de la relation *divise*, est un treillis. Montrer qu'il est distributif. Est-il complémenté ?

Exercice 15 Soient B_1 et B_2 deux algèbres de Boole finies.

i) Soient φ et ψ deux isomorphismes de $B_1 \to B_2$; montrer que si φ et ψ coïncident sur les atomes de B_1 alors $\varphi = \psi$.

ii) Combien existe-il d'isomorphismes entre B_1 et B_2 ?

Exercice 16 Soit B une algèbre de Boole finie contenant exactement n atomes. Si b est un élément de B, on note $\|b\|$ le plus petit entier k tel que dans le diagramme de Hasse de B il existe un chemin montant de longueur k depuis $\perp$ jusqu'à b.

i) Quel est le cardinal de B ?

ii) Que valent $\|\perp\|$, $\|\top\|$, $\|a\|$ pour un atome a de B ?

iii) Montrer que si $b \leq b'$ alors $\|b\| \leq \|b'\|$?

iv) Supposons que $B = \mathcal{P}(X)$ pour un certain ensemble X ; si $b \in B$ donner une expression simple de $\|b\|$.

v) Soient k un entier compris entre 0 et n. Combien y-a-t-il d'éléments b de B tels que $\|b\| = k$?

vi) Soient $b \in B$ tel que $\|b\| = k$. Combien b a-t-il de successeurs ?

vii) Combien le diagramme de Hasse de B contient-il d'arêtes ?

Exercice 17 Soit B un ensemble à 2^n éléments. Combien y-a-t-il de relations d'ordre différentes sur B qui munissent B d'une structure d'algèbre de Boole ?