DEA MDFI — Preuves et Types
Examen 2002-2003

Durée : 3h. Documents autorisés.

Exercice 1 On considère les formules suivantes, où A, B et $P(x)$ sont des formules atomiques distinctes et différentes de v (vrai) et f (faux).

1. $(A \Rightarrow B) \Rightarrow (\neg A \vee B)$
2. $(\neg A \vee B) \Rightarrow (A \Rightarrow B)$
3. $\exists x \neg P(x) \Rightarrow \neg \forall x P(x)$
4. $\neg \forall x P(x) \Rightarrow \exists x \neg P(x)$
5. $(A \Rightarrow B) \vee (B \Rightarrow A)$

Déterminer celles qui sont démontrables en logique intuitionniste : selon le cas, soit on donnera une démonstration en déduction naturelle ou en calcul des séquents intuitionniste, soit on montrera qu'il n'en existe pas en considérant les dernières règles possibles et on donnera une démonstration dans le calcul des séquents classique s'il en existe.

Exercice 2 Construire, dans le système F, un terme du λ-calcul qui calcule la multiplication de deux entiers, c'est-à-dire un terme normal clos t tel que pour tous entiers n, m, $(t)\underline{n}\,\underline{m}$ se β-réduit en $\underline{nm}$, où on rappelle que l'entier de Church $\underline{n}$ est le terme $\lambda z \lambda s.(s)^n z$.

À cet effet, on pourra se placer dans le système AF2, et construire un terme t tel que $\vdash_{\mathcal{E}} t : N(x), N(y) \Rightarrow N(xy)$, où $\mathcal{E}$ est un système consistant d'équations pour la multiplication.

En déduire un terme du système AF2 qui calcule la factorielle d'un entier.

Exercice 3 Soit X une catégorie cartésienne fermée avec un objet initial $\perp$. On notera $x \times y$ le produit de deux objets de X, x^y l'exponentielle et $\top$ l'objet terminal. On notera $X(x, y)$ la collection des flèches de x vers y dans X. On rappelle que, dans ces conditions, quel que soit l'objet x de X, $X(x, \perp)$ est soit l'ensemble vide soit un singleton.

Soit $\neg : X^{\mathrm{op}} \to X$ le foncteur “négation”, défini sur les objets par $\neg x = \bot^x$ et sur les flèches par $\neg f = \bot^f : \neg y \to \neg x$ pour $f : x \to y$. On note $\neg^{\mathrm{op}}$ le “même” foncteur de X vers X^{op}.

1. Montrer que $X(y, \neg x)$ est en bijection naturelle avec $X(x, \neg y)$. En déduire que $\neg$ est adjoint à droite de $\neg^{\mathrm{op}}$.
2. Donner une flèche de $\top$ vers $\neg\bot$ et montrer que c'est un isomorphisme. En déduire que $X(x, y)$ est en bijection naturelle avec $X(\neg\bot, y^x)$.
3. On suppose que $\neg$ est adjoint *à gauche* de $\neg^{\mathrm{op}}$. Utiliser la question précédente pour montrer qu'avec cette hypothèse, quels que soient les objets x et y de X, $X(x, y)$ est soit l'ensemble vide soit un singleton.

Ce résultat renforce donc le théorème de Joyal, qui arrive à la même conclusion en partant de l'hypothèse a priori plus forte d'un isomorphisme naturel entre x et $\neg\neg x$.

Exercice 4 On note B l'espace cohérent des booléens défini par $|B| = \{vv, ff\}$ et $a \frown b$ ssi $a = b$. Pour simplifier, comme les cliques de B sont soit des singletons, soit la clique vide, on notera a la clique $\{a\}$ et $\bot$ la clique vide. Plus généralement, si $x_1, \ldots, x_n$ sont des cliques de B, on notera $(x_1, \ldots, x_n)$ la clique $\{1\} \times x_1 \cup \cdots \cup \{n\} \times x_n$ de l'espace $B^n = B \,\&\, \cdots \,\&\, B$.

1. Écrire toutes les cliques de B^2 en utilisant la notation ci-dessus ;
2. montrer que toute fonction croissante de $\mathcal{C}(B^n)$ dans $\mathcal{C}(B)$ est continue ;
3. donner les traces (continues) de toutes les fonctions croissantes C de $\mathcal{C}(B^2)$ dans $\mathcal{C}(B)$ vérifiant $C(vv, vv) = vv$ et $C(ff, vv) = C(vv, ff) = ff$; parmi ces fonctions, dire lesquelles sont stables et lesquelles sont seulement continues ;
4. on appelle « ou gauche », et on note D_g, la fonction stable de $\mathcal{C}(B^2)$ dans $\mathcal{C}(B)$ définie par $D_g(vv, \bot) = D_g(ff, vv) = vv$ et $D_g(ff, ff) = ff$. Écrire les valeurs de D_g sur toutes les cliques de B^2 ;
5. donner la définition du « ou droite », noté D_d, et montrer que les traces de D_g et de D_d sont incompatibles dans $B^2 \to B$;
6. en déduire qu'il existe une fonction stable G (dont on donnera la trace) de $\mathcal{C}(B^2 \to B)$ dans $\mathcal{C}(B)$ telle que $G(\mathrm{tr}(D_g)) = vv$ et $G(\mathrm{tr}(D_d)) = ff$ (où $\mathrm{tr}(F)$ dénote la trace de F). Une telle fonction est appelée un « goûteur de ou » ;
7. donner la trace d'un « goûteur de ou » linéaire.