DEA MDFI

Examen de logique

Exercice 1 On se donne une variable propositionnelle O. Pour toute formule A, on note $\neg_O A$ la formule $A \rightarrow O$.

i) Donner une preuve en déduction naturelle intuitionniste de $\neg_O\neg_O\neg_O A \rightarrow \neg_O A$; écrire le lambda-terme correspondant à cette preuve. Que se passe-t-il si on enlève un $\neg_O$ de chaque côté de la flèche, c'est à dire pour la formule $\neg_O\neg_O A \rightarrow A$?

ii) Donner une preuve en déduction naturelle intuitionniste du séquent $\neg_O\neg_O(A \rightarrow B), A \vdash \neg_O\neg_O B$. Écrire le lambda-terme correspondant.

iii) Soit A un type simple. On définit la formule A^O par récurrence sur A :

- si A est atomique alors $A^O = \neg_O A$;
- sinon $A = A_1 \rightarrow A_2$ et $A^O = A_1^O \rightarrow A_2^O$.

Montrer, par récurrence sur A, que $\neg_O\neg_O A^O \rightarrow A^O$ est démontrable en déduction naturelle intuitionniste.

Exercice 2 On note B l'espace cohérent des booléens : $|B| = \{\mathbf{tt}, \mathbf{ff}\}$, $\mathbf{tt}$ et $\mathbf{ff}$ sont incohérents. Si i est un entier et x un élément de $|B|$, on note ix le couple (i, x). On rappelle que $B^2 = B \times B$ est défini par : $|B^2| = |B| + |B| = \{1\mathbf{tt}, 1\mathbf{ff}, 2\mathbf{tt}, 2\mathbf{ff}\}$ et $ix \frown_{B^2} jy$ si $i \neq j$ ou si $i = j$ et $x = y$.

i) Écrire toutes les cliques de B^2.

ii) Une fonction F de $\mathcal{C}(B^2)$ dans $\mathcal{C}(B)$ est dite *conjonctive* si elle est croissante et satisfait : $F(\{1\mathbf{tt}, 2\mathbf{tt}\} = \{\mathbf{tt}\}$, $F(\{1\mathbf{ff}, 2x\}) = F(\{1x, 2\mathbf{ff}\}) = \{\mathbf{ff}\}$ pour $x = \mathbf{tt}, \mathbf{ff}$. Donner la liste de toutes les fonctions conjonctives en spécifiant pour chacune si elle est continue et/ou stable. Dans le cas stable on donnera la trace de la fonction.

Exercice 3 Soient A, B et C des formules et $F = (A \rightarrow B) \vee (B \rightarrow C)$.

i) Montrer que F est démontrable en calcul des séquents classique.

ii) Montrer que F n'est pas démontrable en calcul des séquents intuitionniste.