DEA MDFI

Examen de logique

Exercice 1 Si E est un espace cohérent, $\mathcal{D}(E)$ désigne l'ensemble des cliques de E.
On rappelle qu'une fonction linéaire d'un espace cohérent E dans un espace cohérent F est une fonction stable f de E dans F telle que $f(\emptyset) = \emptyset$ et telle que, pour toutes cliques x et y de E, si $x \cup y$ est une clique, alors $f(x \cup y) = f(x) \cup f(y)$. On rappelle que cette condition est équivalente à la suivante : pour tout élément (x, b) de la trace de f, la clique x a exactement un élément.
Soient E, F et G des espaces cohérents, et soit f une fonction stable de $E \,\&\, F$ dans G.

i) Soient x une clique de E et y une clique de F. Montrer que les deux fonctions

$$\begin{array}{rcl} f^1_y : \mathcal{D}(E) & \to & \mathcal{D}(G) \\ x' & \mapsto & f((\{1\} \times x') \cup (\{2\} \times y)) \end{array}$$

et f^2_x

$$\begin{array}{rcl} f^2_x : \mathcal{D}(F) & \to & \mathcal{D}(G) \\ y' & \mapsto & f((\{1\} \times x) \cup (\{2\} \times y')) \end{array}$$

sont stables. Donner la trace de f^1_y en fonction de y et de la trace de f, et celle de f^2_x en fonction de x et de la trace de f (justifier vos réponses).

ii) On dira que f est *bilinéaire* si, pour tout $x \in \mathcal{D}(E)$ et tout $y \in \mathcal{D}(F)$, chacune des deux fonctions f^1_y et f^2_x sont linéaires.
Montrer que f est bilinéaire si et seulement si, pour tout élément (z, c) de la trace de f, la clique z s'écrit

$$z = \{(1, a), (2, b)\}$$

avec $a \in |E|$ et $b \in |F|$.

iii) On rappelle que $E \otimes F$ est l'espace cohérent de trame $|E| \times |F|$, muni de la relation de cohérence suivante : deux éléments (a, b) et (a', b') de $|E| \times |F|$ sont cohérents ou égaux dans $E \otimes F$ si et seulement si a et a' sont cohérents ou égaux dans E, et b et b' sont cohérents ou égaux dans F.
Montrer que la fonction

$$\begin{array}{rcl} \tau : \mathcal{D}(E \,\&\, F) & \to & \mathcal{P}(|E \otimes F|) \\ (\{1\} \times x) \cup (\{2\} \times y) & \mapsto & x \times y \end{array}$$

prend ses valeurs dans $\mathcal{D}(E \otimes F)$, et est bilinéaire de $E \,\&\, F$ dans $E \otimes F$. Donner sa trace (justifiez votre réponse).

iv) Montrer que $(E \otimes F, \tau)$ a la *propriété universelle* suivante : pour tout espace cohérent G et toute fonction bilinéaire f de $E \,\&\, F$ dans G, il existe une et une seule fonction *linéaire* f' de $E \otimes F$ dans G telle que $f = g \circ \tau$. Dans la suite, cette unique fonction g sera notée f^L.

v) Soit f une fonction bilinéaire de $E \,\&\, E$ dans F. On dit que f est *symétrique* si, pour toutes cliques x, x' de E, on a

$$f(x, x') = f(x', x) \; .$$

Montrer que f est symétrique si et seulement si, pour tout couple $((a, a'), b)$ appartenant à la trace de f^L, le couple $((a', a), b)$ appartient aussi à la trace de f^L. En déduire que si f est symétrique, et si $((a, a'), b)$ appartient à la trace de f^L, alors a est a' sont incohérents ou égaux dans E.

(**Attention :** la question suivante est nettement plus vache que les précédentes.)

vi) Donner un espace cohérent E^2 et une fonction bilinéaire symétrique σ de $E \,\&\, E$ dans E^2 tels que la propriété universelle suivante soit satisfaite : pour tout espace cohérent F et toute fonction bilinéaire symétrique f de $E \,\&\, E$ dans F, il existe une et une seule fonction linéaire g de E^2 dans F telle que $f = g \circ \sigma$.

Exercice 2 Les types du système de typage $\mathfrak{D}\boldsymbol{\Omega}$ sont : (i) les *types atomiques*, à savoir la constante de type Ω et un ensemble dénombrable V de variables propositionnelles que l'on notera par des lettres minuscules (a, b, etc.) ; (ii) si A et B sont des types alors $A \to B$ est un type et (iii) si A et B sont des types alors $A \wedge B$ est un type (appelé *l'intersection* de A et B). On définit les types *triviaux* par : Ω est un type trivial, si A et B sont des types triviaux alors $A \wedge B$ est un type trivial, si B est un type trivial alors $A \to B$ est un type trivial. Un type *plein* est un type où toutes les occurrences de Ω apparaissent en position négative.
Le système $\mathfrak{D}\boldsymbol{\Omega}$ sert à dériver des séquents de la forme $\Gamma \vdash t : A$ où t est un lambda-terme, A est un type de $\mathfrak{D}\boldsymbol{\Omega}$ et Γ est un *contexte de variables typées*, *i.e.*, $\Gamma = x_1 : A_1, \ldots, x_n : A_n$ où les x_i sont des variables distinctes du lambda-calcul et les A_i sont des types de $\mathfrak{D}\boldsymbol{\Omega}$. Les règles de $\mathfrak{D}\boldsymbol{\Omega}$ sont les suivantes :

Variable Si $x : A \in \Gamma$ alors $\Gamma \vdash x : A$;
Flèche intro Si $\Gamma, x : A \vdash t : B$ alors $\Gamma \vdash \lambda x\, t : A \to B$;
Fleche élim Si $\Gamma \vdash t : A \to B$ et $\Gamma \vdash u : A$ alors $\Gamma \vdash (t)u : B$;
Intersection intro Si $\Gamma \vdash t : A$ et $\Gamma \vdash t : B$ alors $\Gamma \vdash t : A \wedge B$ (Méditer cinq secondes (au moins) sur le fait que c'est le même t qui est de type A et B ; c'est cette règle qui donne son nom au connecteur $\wedge$; c'est aussi cette règle qui fait que le système $\mathfrak{D}\boldsymbol{\Omega}$ n'est pas un système de preuve) ;
Intersection élim Si $\Gamma \vdash t : A_1 \wedge A_2$ alors $\Gamma \vdash t : A_i$ ($i = 1$ ou 2) ;
Omega $\Gamma \vdash t : \Omega$ (à cause de cette règle, tout terme est typable dans $\mathfrak{D}\boldsymbol{\Omega}$).

i) Donner un exemple de type non plein qui ne soit pas trivial.

ii) Donner un type plein à $\lambda x x$, $\lambda f \lambda x(f)x$, $\lambda f \lambda x(f)(f)x$, $\lambda x(x)x$. Donner un type non trivial à $\lambda x(x)(\delta)\delta$.

iii) Montrer que si $\Gamma, x : A \vdash t : B$ et $\Gamma \vdash u : A$ alors $\Gamma \vdash t[u/x] : B$. En déduire que le système $\mathfrak{D}\boldsymbol{\Omega}$ conserve les types par réduction (en anglais, $\mathfrak{D}\boldsymbol{\Omega}$ satisfait la *subject reduction*), *i.e.*, si t se β-réduit en t' et si $\Gamma \vdash t : A$ alors $\Gamma \vdash t' : A$.

iv) Montrer que si $\Gamma \vdash t[u/x] : A$ alors $\Gamma \vdash (\lambda x t)u : A$. En déduire que si t se β-réduit en t' et que $\Gamma \vdash t' : A$ alors $\Gamma \vdash t : A$.

Avec cette dernière question on a achevé de montrer que les types de $\mathfrak{D}\boldsymbol{\Omega}$ sont invariants par β-équivalence. On remarquera au passage l'importance de la règle Ω pour cela. Autrement dit, on peut définir un modèle dénotationnel du lambda-calcul en interprétant les termes par l'ensemble de leurs types de $\mathfrak{D}\boldsymbol{\Omega}$. On va maintenant voir que ce modèle n'est en fait autre que le modèle de Engeler.
On considère le modèle de Engeler construit au dessus de l'ensemble V des variables propositionnelles. À tout type A de $\mathfrak{D}\boldsymbol{\Omega}$, on associe un élément A^* de $\mathcal{D}_{\text{fini}}(V)$ par : si A est Ω alors A^* est $\emptyset$; si A est la variable propositionnelle a alors A^* est $\{a\}$; si A est $A_1 \to A_2$ alors $A^* = \bigcup_{\sigma \in A_2^*} \{(A_1^*, \sigma)\}$; si A est $A_1 \wedge A_2$ alors $A^* = A_1^* \cup A_2^*$.

v) Montrer que A est un type trivial ssi $A^* = \emptyset$.

vi) Montrer que si $T \in \mathcal{D}_{\text{fini}}(V)$ alors il existe un type A tel que $T = A^*$.

vii) Montrer que si $x_1 : A_1, \ldots, x_n : A_n \vdash t : A$ alors $A^* \subset t_l^*(A_1^*, \ldots, A_n^*)$ où l est la suite de variables $\langle x_1, \ldots, x_n \rangle$.

viii) Montrer que si $l = \langle x_1, \ldots, x_n \rangle$ contient toutes les variables libres de t, et si A_1, …, A_n, A sont des types tels que $A^* \subset t_l^*(A_1^*, \ldots, A_n^*)$ alors $x_1 : A_1, \ldots, x_n : A_n \vdash t : A$.

ix) Exprimer de manière synthétique (mais néanmoins précise) le théorème que l'on vient de démontrer.

x) En utilisant le théorème 1.8 des notes de Thomas, déduire de ce qui précède que $\lambda x(x)(\delta)\delta$ n'a pas de type plein.

Exercice 3 On considère la déduction naturelle du second ordre (système F). On fixe une fois pour toute une variable propositionnelle que l'on note O. Étant donnée une formule A ne contenant pas O, on définit sa *traduction de Gödel* A^* par : si A est la variable propositionnelle X alors $A^* = X \to O$; si $A = A_1 \to A_2$ alors $A^* = A_1^* \to A_2^*$; si $A = \forall X A_0$ alors $A^* = \forall X A_0^*$.

i) On note P la formule de Pierce, à savoir $\forall X \forall Y((X \to Y) \to X) \to X$. Donner une preuve de P^* dans le système F.

ii) Montrer que tout type du système F s'écrit $\forall \bar{X}_1(A_1 \to \ldots \forall \bar{X}_n(A_n \to X)\ldots)$ où $\forall \bar{X}_i$ désigne une suite de $\forall$ et où X est une variable propositionnelle possiblement quantifiée par l'un des $\forall \bar{X}_i$. En déduire que l'on peut démontrer $((A^* \to O) \to O) \to A^*$ dans le système F.