Suites de Goodstein et hydre de Lerne

TER de maîtrise

Laurent Regnier
Institut de Mathématiques de Luminy
Université d'Aix-Marseille

Roland Reinger
Institut d'Épistémologie appliquée

2 avril 2013

Résumé

Dans ce rapport on va montrer qu'aussi surprenant que cela puisse paraître, toute suite de Goodstein est ultimement stationnaire et qu'Hercule finit par vaincre l'hydre.

Table des matières

1 Introduction

On va parler de suites de Goodstein et d'hydre de Lerne. En particulier on exposera l'intéressant théorème 2.1 qui contient l'équation 1. Mais à dire vrai c'est surtout un prétexte pour donner quelques exemples d'utilisation de LaTeX. Par exemple comment fait on pour créer un nouveau paragraphe ?

C'est très simple, on saute une ligne. Cela termine le paragraphe courant et en commence un nouveau. En LaTeX un blanc est égal à plusieurs blancs ; les blancs en début de ligne sont totalement ignorés, de même que les blancs suivant un nom de macro [1] ; un saut de ligne est équivalent à un blanc à la règle ci-dessus près : deux (ou plus) sauts de lignes consécutifs ouvrent un nouveau paragraphe.

Enfin tous les caractères suivant un % et sur la même ligne, *y compris le caractère de fin de ligne* sont ignorés.

1.1 Caractères accentués

Une question intéressante : comment taper des caractères accentués si on n'a pas un clavier français ? On peut configurer un clavier américain pour obtenir les caractères accentués mais ça n'est pas toujours simple.

1. C'est pour cette raison que dans le source LaTeX de ce fichier les utilisations de la macro `\LaTeX`, ainsi que d'autres macros sans arguments sont (presque) toujours suivies d'un groupe vide {}.

Une autre solution en LaTeX est d'obtenir les accents au moyen de commandes : la commande `\'` produit un accent aigu sur la lettre qui suit, si on tape par exemple `\'elite`, on obtient ¡¡ élite ¿¿. De même les commandes `` \` `` et `\^` produisent respectivement un accent grave et un accent circonflexe (comme dans pêche et mèche) ; pour obtenir un c cédille on tape `\c{c}` (façon). Remarquons que ces commandes fonctionnent quelque soit la lettre que l'on accentue, par exemple on peut facilement faire À ou ñ, voire Ṕ (P accent aigu) ou Q̧ (O cédille).

Jeu : deviner quelle commande produit le tréma.

2 Définitions

2.1 Ensemble bien ordonné

Définition 2.1.1 *Un ensemble X muni d'une relation d'ordre $<$ est* bien ordonné *si :*
- *la relation $<$ est totale ;*
- *toute partie non vide de X a un plus petit élément.*

2.2 Ordinaux

Définition 2.2.1 *Un* ordinal *est un ensemble bien ordonné par la relation $\in$.*

2.3 Arithmétique ordinale

Théorème 2.1 *Les opérations ordinales vérifient les propriétés suivantes :*

$$\begin{aligned} \alpha + 0 &= \alpha & (1) \\ (\alpha+\beta)\cdot\gamma &= \alpha\cdot\gamma + \beta\cdot\gamma & (2) \\ \alpha^{\beta+1} &= \alpha^\beta \cdot \alpha & (3) \end{aligned}$$

2.4 Exemple de suite de Goostein

j	G_i	i

2	100	2
3	100	3

j	G_i	i

2	100	2
3	100	3

3 Quelques théorèmes qui n'ont rien à voir

Théorème 3.1 *La formule d'Euler :*

$$e^{2i\pi} = 1 \tag{4}$$

Proposition 3.2 *La somme des n premiers entiers est :*

$$\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$$

Cette propriété est fausse dans le cas des ordinaux (voir définition 2.2.1, page 2).

Théorème 3.3 (Nombre d'or) *Le développement en fraction continue du nombre d'or est :*

$$\varphi = \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cdots}}}$$

Théorème 3.4 *La fonction* $\log_2$ *définie par*

$$\log_2 x = \frac{\log x}{\log 2}$$

est l'inverse (à droite) de la fonction ¡¡ 2 puissance ¿¿ /

$$2^x = e^{x \log 2}$$

En effet on a le calcul suivant :

$$\begin{array}{rcl} 2^{\log_2 x} & = & e^{\log 2 \frac{\log x}{\log 2}} \\ & = & e^{\log x} \\ & = & x \end{array}$$

Et voici un dernier petit calcul pour la route, afin de montrer l'usage de l'environnement `align`. Ce calcul démontre que dans un anneau commutatif, 0 (l'élément neutre de l'addition) est absorbant pour la multiplication :

$$\begin{aligned} 0x &= 0x + 0 && \text{car 0 est élément neutre de } + \\ &= 0x + (0x + (-0x)) && \text{car } -0x \text{ est l'opposé de } 0x \text{ pour } + \\ &= (0x + 0x) + (-0x) && \text{par associativité de } + \\ &= (0 + 0)x + (-0x) && \text{par distributivité} \\ &= 0x + (-0x) && \text{car 0 est neutre, donc } 0 + 0 = 0 \\ &= 0 && \text{car } -0x \text{ est l'opposé de } 0x \end{aligned}$$