Devoir à la maison

Exercice 1. adapté d'un oral de l'X 2016, mineure mathématique

Soit $f = [0,+\infty[\to [0,+\infty[$ une fonction de $\mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^+,\mathcal{B}(\mathbb{R}^+),\lambda) = \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^+)$.

1. A-t-on $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$?
2. Montrer que si f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^+$ et que $f' \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^+)$ alors $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$.
3. Montrer que si f est uniformément continue sur $\mathbb{R}^+$ alors $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$.
4. On suppose que f est décroissante.
   (a) Montrer que $xf(x) \to 0$ quand $x \to +\infty$.
   (b) Peut-on trouver $\alpha > 1$ tel que $\lim\limits_{x\to+\infty} x^\alpha f(x) = 0$?

Exercice 2. Casting 2016-Majeure Mathématiques

On considère

$$\varphi : x \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{e^{itx}}{1+t^2}dt$$

1. Donner le domaine de définition de φ.
2. Donner le domaine de continuité de φ.
3. Montrer que φ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^*$ et montrer que

$$\forall x \in \mathbb{R}^*,\ \varphi'(x) = i\int_0^{+\infty} \frac{te^{itx}}{1+t^2}dt$$

   Indication : on pourra calculer la dérivée de $t \mapsto \frac{t}{1+t^2}$.
4. Montrer que pour $x > 0$

$$\varphi'(x) = i\int_0^{+\infty} \frac{ue^{iu}}{x^2+u^2}du$$

5. Montrer que

$$\forall u \in [0,1],\ |e^{iu}-1| = 2\sin\left(\frac{u}{2}\right)$$

6. Déterminer un équivalent de $\varphi'(x)$ quand $x \to 0^+$.
   Indication : on pourra décomposer l'intégrale en plusieurs sous-intégrales.
7. La fonction est-elle dérivable en 0 ?

Exercice 3.

Démontrer que pour tout entier $n \geq 1$ l'intégrale de Riemann impropre

$$u_n = \int_0^1 \frac{(\ln(x))^n}{\sqrt{1-x^2}} dx$$

est absolument convergente, puis étudier le comportement asymptotique de la suite $(u_n, n \geq 1)$.