Faculté des Sciences
Aix Marseille Université

Année universitaire 2017/2018

Site : ☐ Luminy ☐ St-Charles ☒ St-Jérôme ☐ Cht-Gombert ☐ Aix-Montperrin ☐ Aubagne-SATIS

Sujet de : ☐ 1$^{\text{er}}$ semestre ☒ 2$^{\text{ème}}$ semestre ☐ Session 2 Durée de l'épreuve : 3h

Examen de : L3 Nom du diplôme : Licence MPCI

Code du module : SST6U1J Libellé du module : Intégration et transformée de Fourier

Calculatrices autorisées : NON Documents autorisés : NON

Rendre les exercices de 1 à 3 sur une copie et les exercices 4 à 6 sur une autre.
Il est conseillé de lire en entier l'énoncé avant de commencer.

Notations : Soit $(E, \mathcal{T}, m)$ un espace mesuré. Pour $p \geq 1$ fixé on note $\mathcal{L}^p_{\mathbb{R}}(E, \mathcal{T}, m) = \mathcal{L}^p(E)$ l'espace des fonctions mesurables de E à valeurs dans $\mathbb{R}$ telles que $\|f\|_p := \left(\int |f|^p dm\right)^{\frac{1}{p}}$ est finie.

Exercice 1.

Soit $(E, \mathcal{T}, m)$ un espace mesuré et soit $f\colon E \to \mathbb{R}$ une fonction intégrable.
On note $I = \{p \in [1, +\infty[, f \in \mathcal{L}^p(E)\}$.

1. Montrer que si $p_1, p_2 \in I$ alors $f \in \mathcal{L}^p(E)$ pour tout $p \in [p_1, p_2]$. Indication : vérifier d'abord que $|f|^p \leq |f|^{p_1} + |f|^{p_2}$.
2. En déduire que I est un intervalle. Indication : vérifier que $]a, b[\subset I \subset [a, b]$ où $a = \inf I$ et $b = \sup I$.
3. On considère l'espace mesuré $([2, +\infty[, \mathcal{B}([2, +\infty[), \lambda)$ des boréliens de $[2, +\infty[$ muni de la mesure de Lebesgue. Calculer I pour les fonctions suivantes : $f(x) = \frac{1}{x}$ et $g(x) = \frac{1}{x \log^2 x}$.

Exercice 2.

1. Montrer que la fonction $x \mapsto \frac{1-\exp(-x^2y)}{x^2}$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$ pour tout $y \geq 0$. Indication : vérifier d'abord que pour tout réel x on a $1 - \exp(-x) \leq x$.
   On considère la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$
   $$F(y) = \int_0^{+\infty} \frac{1 - \exp(-x^2y)}{x^2} dx.$$
2. Montrer que F est continue sur $\mathbb{R}_+$ et dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$.
3. Calculer F. Indication : on rappelle que $\int_0^{+\infty} \exp(-x^2)dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

Exercice 3.

On considère $\mathbb{R}^n$ muni de la tribu des boréliens et de la mesure de Lebesgue. Soient $f, g \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$ et soit $F(x, y) = f(x - y)g(y)$.

1. Montrer que la fonction $y \mapsto F(x, y)$ est intégrable pour presque tout $x \in \mathbb{R}^n$. Indication : vérifier que $\|F\|_1 = \|f\|_1\|g\|_1$.

2. On pose $f \star g(x) = \int_{\mathbb{R}^n} F(x,y)dy$. Montrer que $f \star g = g \star f$ presque partout.
3. Montrer que $\|f \star g\|_1 \leq \|f\|_1 \|g\|_1$.

Exercice 4.

On considère $\mathbb{R}$ muni de la tribu des boréliens et de la mesure de Lebesgue.
Dans tout ce qui suit $p > 1$ est un réel fixé et q est tel que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

1. Dans cette question on étudie la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par $f_n = \frac{1}{n^{1/p}} \mathbb{1}_{[n,2n]}$ (où $\mathbb{1}_{[n,2n]}$ est la fonction telle que $\mathbb{1}_{[n,2n]}(x) = 1$ si $x \in [n, 2n]$ et 0 sinon).
   (a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a $f_n \in \mathcal{L}^p(\mathbb{R})$. Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} \|f_n\|_p$.
   (b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que pour tout $g \in \mathcal{L}^q(\mathbb{R})$ on a
   $$\int |g| \mathbb{1}_{[n,2n]} d\lambda \leq n^{\frac{1}{p}} \left(\int |g|^q \mathbb{1}_{[n,2n]} d\lambda \right)^{1/q}.$$
   (c) Montrer que pour tout $g \in \mathcal{L}^q(\mathbb{R})$ on a $\displaystyle\int f_n g d\lambda \to 0$ quand $n \to +\infty$.
2. On considère maintenant $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de fonctions de $\mathcal{L}^p(\mathbb{R})$ et $f \in \mathcal{L}^p(\mathbb{R})$ telle que $\|f - f_n\|_p \to 0$ pour $n \to +\infty$.
   Montrer que pour tout $g \in \mathcal{L}^q(\mathbb{R})$ on a $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int (f_n - f) g d\lambda = 0$

Exercice 5.

Soit F la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par $F(x,y) = e^{-y} \sin(2xy) \mathbb{1}_{[0,1]}(x) \mathbb{1}_{[0,+\infty[}(y)$ (avec pour $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ $\mathbb{1}_A(x) = 1$ si $x \in A$ et 0 sinon).

On considère l'espace mesuré $\mathbb{R}^2$ muni de la tribu des boréliens et de la mesure de Lebesgue notée λ_2.

1. Montrer que F est dans $\mathcal{L}^1(\mathbb{R}^2)$.
2. Montrer que $\displaystyle\int F(x,y) d\lambda_2(x,y) = \frac{\ln(5)}{4}$. En déduire la valeur de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin^2(y)}{y} e^{-y} dy$.

Exercice 6.

On considère $\mathbb{R}$ muni de la tribu des boréliens et de la mesure de Lebesgue et soit f une fonction de $\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$.

On note pour $\omega \in \mathbb{R}$ $\displaystyle\hat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt$

1. Montrer que $\hat{f}$ est définie pour tout $\omega \in \mathbb{R}$ et que $\omega \mapsto \hat{f}(\omega)$ est une fonction bornée sur $\mathbb{R}$.
2. Soit $g : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ une fonction de $\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$. Montrer que $\displaystyle\int f(x)\hat{g}(x)dx = \int g(x)\hat{f}(x)dx$.
3. Calculer $\widehat{f \star g}$ où $f \star g$ est défini dans l'exercice 3.