Année universitaire 2017/2018

Site : ☐ Luminy ☐ St-Charles ☒ St-Jérôme ☐ Cht-Gombert ☐ Aix-Montperrin ☐ Aubagne-SATIS

Sujet de : ☐ 1er semestre ☒ 2ème semestre ☐ Session 2 Durée de l'épreuve : 2h

Examen de : L2 Nom du diplôme : Licence de sciences pour l'ingénieur

Code du module : ENSPI4U1/SPI4U1TA Libellé du module : UE1. Séries et applications

Calculatrices autorisées : NON Documents autorisés : NON

Il est conseillé de lire en entier l'énoncé avant de commencer.
Une réponse non justifiée ne rapportera aucun point.

Notation et définition Soit f une fonction 2π périodique telle que $\int_{-\pi}^{\pi}|f(t)|dt$ existe.

— Soit $n \in \mathbb{Z}$. On note $c_n(f) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)e^{-int}dt$ le coefficient de Fourier d'ordre n de f. On a aussi pour $n \geq 1$ $a_n(f) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos(nt)dt$, $b_n(f) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin(nt)dt$ et $a_0(f) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)dt$.

Exercice 1.

1. Calculer $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2(t)dt$.
2. Soit $\alpha > 0$. Montrer que $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t^{\alpha+1}}dt$ converge.
3. En déduire à l'aide d'une intégration par partie que $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\cos(t)}{t^{\alpha}}dt$ converge pour $\alpha > 0$.
4. Soit $x \geq 1$. Montrer que $\displaystyle\int_1^{x} \frac{\cos^2(t)}{t}dt$ est la somme de deux intégrales, l'une divergente quand $x \to +\infty$ et l'autre convergente quand $x \to +\infty$. En déduire que $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\cos^2(t)}{t}dt$ diverge.

Exercice 2.

Indiquer si les séries suivantes convergent absolument en justifiant à chaque fois votre réponse.

$$S_1 = \sum_{n\geq 0} \frac{n}{3^n} \qquad S_2 = \sum_{n\geq 1} e^{n(1-n)} \qquad S_3 = \sum_{n\geq 1} \frac{1+n^2}{n^2}$$

Exercice 3.

1. Montrer que $\sum_{n\geq 0} 2^{-n}e^{in\alpha}$ converge absolument pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$.
2. Montrer que $\sum_{n\geq 1} \frac{2^{-n-1}}{(n+1)n}$ converge.

   On se propose dans la suite de calculer la valeur de $\sum_{n=0}^{+\infty} 2^{-n}e^{in\alpha}$ *et* $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2^{-n-1}}{(n+1)n}$.
3. Donner le rayon de convergence R de la série entière $\sum_{n\geq 0} z^n$ et donner la valeur de $\sum_{n=0}^{+\infty} z^n$ pour $|z| < R$ et $z \in \mathbb{C}$.
4. Calculer la valeur de $\sum_{n=0}^{+\infty} 2^{-n}e^{in\alpha}$ en fonction de $\alpha \in \mathbb{R}$.

   Indication pour la suite : on rappelle qu'on peut dériver et intégrer une série entière, terme à terme, à l'intérieur de son disque de convergence.

5. Montrer que pour $x \in \mathbb{R}$ tel que $-R < x < R$ on a $\ln(1-x) = -\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1}$.
6. Pour $x \in \mathbb{R}_+^*$ calculer $\displaystyle\int_0^x \ln(1-t)dt$ en fonction de x.
7. Donner le développement en série entière de la fonction $x \mapsto \displaystyle\int_0^x \ln(1-t)dt$ en précisant pour quels x il est défini.
8. En déduire la valeur de $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2^{-n-1}}{(n+1)n}$.

Exercice 4.

Soit f la fonction 2π périodique définie par

$$f(x) := \begin{cases} 0 & \text{si } x \in [-\pi, 0] \\ x & \text{si } x \in [0, \pi[\end{cases}$$

1. Tracer le graphe de f sur $[-3\pi, 3\pi[$.
2. Quels sont les points de discontinuité de f ?
3. Calculer les coefficients de Fourier de f c'est-à-dire soit la suite $\{c_n(f), n \in \mathbb{Z}\}$ soit $\{a_n(f), b_n(f), n \in \mathbb{N}\}$.
4. En déduire la série de Fourier de f en tout point $x \in \mathbb{R}$ notée $S_N(f)(x)$.
5. Déterminer en tout point x si $S_N(f)(x)$ pour $N \to +\infty$ converge et vers quelle limite.