EXERCICES SUPPLÉMENTAIRES POUR TRAVAILLER : INTÉGRATION ET INTÉGRALES GÉNÉRALISÉES

Notations et définitions

— $\mathbf{1}_A$ indique que $\mathbf{1}_A(x) = 1$ si $x \in A$ et 0 sinon avec A un sous-ensemble de $\mathbb{R}$.

— Soit f une fonction localement intégrable sur un intervalle $[a,b[$. On note $F(x) = \int_a^x f(t)dt$. On dit que $\int_a^b f(x)dx$ existe si $\lim_{x\to b} F(x)$ existe et on a $\int_a^b f(x)dx = \lim_{x\to b} F(x) - F(a)$.

Intégration : intégration par parties et changement de variables

Exercice 1. Intégrations par partie

Calculer à l'aide d'intégrations par partie les intégrales classiques suivantes, en ayant auparavant justifié que la fonction f sous l'intégrale est bien intégrable sur l'intervalle concerné.

$$I_1 = \int_0^1 xe^{-x}dx \qquad I_2 = \int_1^2 x^2\ln(x)dx \qquad I_3 = \int_0^1 x\cos(3x)dx$$

$$I_4 = \int_1^2 \frac{\ln(x)}{\sqrt{x}}dx \qquad I_5 = \int_0^1 \arctan(x)dx \qquad I_6 = \int_0^1 \ln(1+x^2)dx$$

Exercice 2. Deux intégrations par parties

A l'aide d'au moins deux intégrations par parties calculer $\displaystyle\int_0^1 e^x\cos(x)dx$

Exercice 3. Changement de variables

A l'aide d'un changement de variables calculer les intégrales suivantes

$$I_1 = \int_0^1 x^2\sqrt{1+x^3}dx \qquad I_2 = \int_0^\pi \frac{\sin(x)}{1+\cos^2(x)}dx$$

$$I_3 = \int_0^1 \frac{e^{2x}}{e^x+1}dx \qquad I_4 = \int_0^{\ln(2)} \sqrt{e^x-1}dx$$

Exercice 4.

A l'aide du changement de variable $y = \frac{1}{x}$ calculer $\displaystyle\int_{\frac{1}{a}}^{a} \frac{x\ln(x)}{(1+x^2)^2}dx$

Intégrales généralisées

Exercice 5.

Déterminer la nature des intégrales suivantes et lorsqu'elles convergent les calculer

$$I_1 = \int_0^1 \ln(x)dx \qquad I_2 = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x}}dx \qquad I_3 = \int_0^1 \frac{x}{(1-x)^2}dx$$

$$I_4 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \tan(x)dx \qquad I_5 = \int_0^1 \frac{e^x}{x}dx \qquad I_6 = \int_0^1 \frac{x}{(1+x)^2\sqrt{x^5}}dx$$

$$I_7 = \int_0^{+\infty} e^{-x}dx \qquad I_8 = \int_0^{+\infty} \frac{x}{(1+x)^2}dx \qquad I_9 = \int_1^{+\infty} \frac{\arctan(x)}{1+x^2}dx$$

$$I_{10} = \int_1^{+\infty} \frac{\ln(x)}{x}dx \qquad I_{11} = \int_1^{+\infty} \frac{1}{\ln(x)}dx \qquad I_{12} = \int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x(x+1)}}dx$$

$$I_{13} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x}dx \qquad I_{14} = \int_0^{+\infty} xe^{-x}dx$$

Exercice 6.

Soit f une fonction continue sur $[1, +\infty[$ telle que la fonction $F : x \mapsto \displaystyle\int_1^x f(t)dt$ est bornée sur $[1, +\infty[$. Etudier la convergence de $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{f(t)}{t}dt$.