Université Aix-Marseille | 2017-2018
Master Mathématiques et applications | 1ère année

Traitement du signal

Partiel

mardi 6 mars 2018

durée 2 heures

Aucun document ni calculatrice ne sont autorisés.

Les trois exercices proposés sont indépendants et on peut admettre des résultats au cours de la résolution en l'indiquant clairement.

Il est conseillé de lire en entier l'énoncé avant de commencer.
Une réponse non justifiée ne rapportera aucun point.

— La notation $\mathbb{1}_A$ indique que $\mathbb{1}_A(x) = 1$ si $x \in A$ et 0 sinon.
— Si $f \in L^2(\mathbb{R})$, c'est à dire $\int_{\mathbb{R}} |f(t)|^2 dt < +\infty$ on note $\|f\|_2 = \sqrt{\int_{\mathbb{R}} |f(t)|^2 dt}$ et $\hat{f}$ est sa transformée de Fourier au sens $L^2(\mathbb{R})$.
— Si deux fonctions f et g dans $L^2(\mathbb{R})$ on note

$$\langle f, g\rangle = \int_{\mathbb{R}} f(t)\overline{g(t)}dt$$

— On rappelle l'identité de Plancherel pour toutes fonctions f et g dans $L^2(\mathbb{R})$,

$$\langle f, g\rangle = \frac{1}{2\pi}\langle \hat{f}, \hat{g}\rangle$$

1 Transformée de Fourier dans $L^1(\mathbb{R})$

Exercice 1 (*Transformée de Fourier d'une somme d'impulsions modulées en fréquence*)

On peut modéliser certains sons dits "pulsés", comme par exemple ceux émis par des animaux marins à l'aide du modèle suivant. On considère la fonction f telle que

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{x^2}{2}} \text{ si } x > 0 \\ 0 \text{ si } x \leq 0. \end{cases}$$

L'animal émet en des moments réguliers nT_1 pour $0 \leq n \leq N$ une note à une fréquence donnée ω_0 qu'on peut donc écrire $f(x - nT_1)\cos(2\pi\omega_0 x)$. Le signal qui nous intéresse est alors

$$F(x) = \sum_{n=0}^{N} f(x - nT_1)\cos(2\pi\omega_0 x) \tag{1}$$

L'objectif de cet exercice est de calculer la transformée de Fourier de f, à partir de laquelle on peut facilement calculer la transformée de F.
On pourra utiliser si nécessaire que $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \sqrt{2\pi}$

1. Montrer que f est une fonction de $L^1(\mathbb{R})$ ainsi que la fonction $x \mapsto xf(x)$.
2. Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et que la fonction $\tilde{f} : x \mapsto \begin{cases} f'(x) \text{ si } x > 0 \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$ est bien dans $L^1(\mathbb{R})$.
3. Calculer la transformée de Fourier de $\tilde{f}$ en fonction de celle de f (qu'on n'explicitera pas).
4. Montrer que $\hat{f}$ est dérivable et sa dérivée est la fonction $\omega \mapsto -i\int_0^{+\infty} xe^{-i\omega x} f(x)dx$.

5. Écrire l'équation différentielle que f vérifie sur $]0,+\infty[$. Que vérifie-t-elle sur $]-\infty,0[$?
6. Montrer que $\hat{f}$ vérifie l'équation différentielle $(\hat{f})'(\omega) = -\omega \hat{f}(\omega) - i$.
7. Soit $g : \omega \mapsto \int_0^\omega e^{\frac{\omega'^2}{2}} d\omega'$. Calculer $\hat{f}$ et montrer qu'elle s'écrit $\hat{f}(\omega) = Ae^{-\frac{\omega^2}{2}} + Be^{-\frac{\omega^2}{2}} g(\omega)$ où A et B sont deux constantes à valeurs complexes que l'on précisera.
8. Quelle est la limite de $\omega \mapsto e^{-\frac{\omega^2}{2}} g(\omega)$ quand ω tend vers $+\infty$?

La fonction $\omega \mapsto e^{-\omega^2} \int_0^\omega e^{\omega'^2} d\omega'$ est connue sous le nom de fonction de Dawson.

2 Base de cosinus : version discrète

Exercice 2

On s'intéresse à la version discrète de la base de cosinus qui s'applique à des signaux numériques finis de longueur N. On parle de DCT pour Discrete Cosinus Transform. Plusieurs versions sont disponibles et c'est la DCT II (étudiée ci-dessous) qui est utilisée pour la compression d'images dans la norme JPEG.

On munit ici $\mathbb{R}^N$ du produit scalaire usuel. Si x et y sont deux vecteurs de $\mathbb{R}^N$ on a

$$\langle x, y \rangle = \sum_{n=0}^{N-1} x_n y_n$$

On définit N signaux C_n pour $n = 0, \dots, N-1$ de la manière suivante. On pose

$$C_0[k] = \frac{1}{\sqrt{N}} \ \forall k = 0, \dots, N-1$$

Les $N-1$ autres signaux sont définis pour $n = 1, \dots N-1$ par

$$C_n[k] = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{N}} \cos\left(\frac{(2k+1)\pi n}{2N}\right) \ \forall k = 0, \dots, N-1$$

1. L'objectif de cette question est de montrer que $\sum_{n=0}^{N-1} e^{2i\pi \frac{nk_0}{N}} = \begin{cases} 0 & \text{si } k_0 \text{ n'est pas multiple de } N \\ N & \text{sinon.} \end{cases}$
   (a) Calculer $\sum_{n=0}^{N-1} e^{2i\pi \frac{nk_0}{N}}$ si k_0 est multiple de N.
   (b) Soit $k_0 \in \mathbb{Z}$ et $N \in \mathbb{N}^\star$. Montrer que
   $$(1 - e^{\frac{2i\pi k_0}{N}})(1 + e^{\frac{2i\pi k_0}{N}} + e^{\frac{2*2i\pi k_0}{N}} + \cdots + e^{\frac{2i\pi(N-1)k_0}{N}}) = 0$$
   En déduire que $\sum_{n=0}^{N-1} e^{2i\pi \frac{nk_0}{N}} = 0$ si k_0 n'est pas multiple de N.
2. Montrer que la famille des C_n est orthonormale.
3. Est-ce une base de $\mathbb{R}^N$?

3 Échantillonnage et théorème de Shannon

Exercice 3

On note $A = [-2\pi, -\pi] \cup [\pi, 2\pi]$.

Soit ψ la fonction de $L^2(\mathbb{R})$ telle que sa transformée de Fourier est $\omega \mapsto \hat{\psi}(\omega) = \mathbb{1}_A(\omega) = \mathbb{1}_{[-2\pi,-\pi]}(\omega) + \mathbb{1}_{[\pi,2\pi]}(\omega)$.

On note $\mathcal{P}_{wA} = \{f \in L^2(\mathbb{R}) : \hat{f}(\omega) = 0 \text{ pour tout } \omega \notin A\}\}$ et $\mathcal{E} = \{g \in L^2(\mathbb{R}) \text{ tels que } g(\omega) = 0 \text{ si } \omega \notin A\}$.

Les espaces $\mathcal{P}_{wA}$ et $\mathcal{E}$ munis du produit scalaire induit par celui de $L^2(\mathbb{R})$ sont des espaces de Hilbert (admis).

On pose enfin pour $n \in \mathbb{Z}$ $e_n : \omega \mapsto \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{in\omega}$.

L'objectif est ici de voir qu'on peut démontrer un théorème d'échantillonnage avec une autre base hilbertienne que celle vue en cours. En particulier celle-ci permet d'échantillonner les signaux de $\mathcal{P}_{wA}$ avec une fréquence d'échantillonnage plus basse que celle prédite par le théorème du cours tout en assurant une reconstruction parfaite.

1. Calculer ψ et montrer que $\|\psi\|_2 = 1$. Soit $n \in \mathbb{Z}$. Quelle est la transformée de Fourier de $\psi_n : x \mapsto \psi(x - n)$?
2. Soit $f \in \mathcal{P}_{wA}$. On pose $F \in L^2(\mathbb{R})$ telle que $\widehat{F}(\omega) = \hat{f}(\omega)\ \mathbb{1}_{[\pi,2\pi]}(\omega) + \hat{f}(\omega - 2\pi)\ \mathbb{1}_{[0,\pi]}(\omega)$.

   (a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{Z}$ $\langle \hat{f},\ \mathbb{1}_A e_n \rangle = \langle \hat{F}, e_n \rangle$.

   (b) Montrer que $\int_{\mathbb{R}} |\hat{F}(\omega)|^2 d\omega = \int_{\mathbb{R}} |\hat{f}(\omega)|^2 d\omega$
3. Montrer que la famille des $\{\ \mathbb{1}_A e_n, n \in \mathbb{Z}\}$ est une base hilbertienne de $\mathcal{E}$.
4. Montrer que la famille $\{\psi_n, n \in \mathbb{Z}\}$ est une base hilbertienne de $\mathcal{P}_{wA}$
5. Expliciter pour $f \in \mathcal{P}_{wA}$ les coefficients $\langle f, \psi_n \rangle = \frac{1}{2\pi} \langle \hat{f}, \widehat{\psi_n} \rangle$. Commenter et comparer au résultat que donnerait le théorème de Shannon vu en cours.