Université Aix-Marseille	2018-2019
Master Traitement du signal et des images	1ère année

Mathématiques pour le signal et l'image

TP2 : opérateurs de filtrage linéaire.

Le fichier à télécharger dont vous avez besoin est dans la rubrique TP2 du site Ametice.

1 Objectifs

1. Étudier des filtres linéaires : leur réponse impulsionnelle et fréquentielle
2. Restaurer un signal dégradé par un filtrage.

2 Recommandations diverses

— Avant de commencer à travailler on vous recommande d'ouvrir dans le menu principal en haut à gauche les préférences du navigateur Web que vous utilisez. Dans la rubrique Fichiers et applications/Téléchargements choisissez ≪ Toujours demander où enregistrer les fichiers ≫.

— Dans tout ce qui suit vous êtes libre de travailler avec l'interface Python que vous préférez. On suggère pour tous ceux qui n'ont pas de préférence particulière de travailler avec Spyder que l'on peut lancer avec l'application Anaconda.

— Dans tous les cas on vous conseille de travailler avec l'éditeur de texte que vous souhaitez sur un fichier procédure `tp2.py` que vous enregistrez dans le dossier dans lequel vous allez travailler. Vous pouvez créer bien sûr autant de fichiers procédures que vous le souhaitez. Cela vous permet de garder une trace de ce que vous aurez fait.

  Dans le cas où cela vous paraît adapté vous pouvez aussi créer les fonctions qui vous semblent adéquates.

— On vous recommande de configurer aussi les préférences de Spyder en particulier pour les figures. Ainsi ouvrez les préférences dans le menu principal **Python** en haut à gauche, et dans la rubrique **Console Ipython**, **graphics** cochez l'option **Backend : Automatic** afin que vous puissiez manipuler plus facilement les figures.

— Commentez ou expliquez vos codes à l'aide du signe #.

3 Filtrage linéaire

Dans tout le TP on travaille dans $\mathbb{C}^N$.

On note $\{\delta^k, k = 0, \dots N-1\}$ la base canonique de $\mathbb{C}^N$.

On rappelle qu'un filtre linéaire est une application linéaire de $\mathbb{C}^N$ dans $\mathbb{C}^N$ définie à l'aide d'un vecteur $h \in \mathbb{C}^N$ qui à tout signal $x \in \mathbb{C}^N$ associe le signal y tel que

$$y = h \star x$$

c'est à dire telle que pour tout $n = 0, \dots, N-1$

$$y[n] = \sum_{k=0}^{N-1} h[k]x[n-k]$$

avec si nécessaire $x[n-k] = x[N+n-k]$ (sommation modulo N ou dite ≪ circulaire ≫).

Une première remarque qui est détaillée dans le cours c'est que $h = h \star \delta^0$.

Le cours a aussi permis de montrer que la matrice d'un filtre linéaire noté K_h écrite dans la base de Fourier est diagonale et s'écrit

$$D = \begin{pmatrix} \hat{h}[0] & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \hat{h}[1] & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \hat{h}[2] & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \hat{h}[N-2] & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \hat{h}[N-1] \end{pmatrix}$$

Ou autrement dit le vecteur de la base de Fourier e^ℓ, pour ℓ dans $0, \dots N-1$ est vecteur propre de K_h associé à la valeur propre $\hat{h}[\ell]$. En particulier vu que $x = \frac{1}{N} \sum \hat{x}[\ell] e^\ell$ on a la formule

$$y = K_h(x) = \frac{1}{N} \sum_{\ell=0}^{N-1} \hat{x}_\ell \hat{h}_\ell e^\ell$$

Donc **concrètement** pour effectuer un filtrage du signal x à partir de la réponse fréquentielle $\hat{h}$ du filtre K_h on peut

- calculer $\hat{x}$
- multiplier $\hat{x}$ coordonnée par coordonnée à $\hat{h}$ pour obtenir $\hat{y}$.
- utiliser la transformée de Fourier inverse pour calculer $y = h \star x$.

4 Travaux pratiques

Exercice 1 (*Filtre passe-bas idéal*)

La fonction `filtrage` *permet de faire un filtrage d'un signal x.*

Pour $N = f_s = 1024$

et les valeurs de $\omega_c = 64$, $\omega_c = 128$, $\omega_c = 256$

à chaque fois

- *tracer la réponse impulsionnelle h de ce filtre en traçant $h[0], \dots, h[N-1]$ en fonction de $0, \dots, N-1$.*
- *tracer $h[n]$ pour n compris entre $-\frac{N}{2}$ et $\frac{N}{2} - 1$ (cf méthode utilisée dans le TP1) et comparer aux résultats obtenus dans le TD 2.*
- *tracer le module de la réponse fréquentielle du filtre (ou autrement dit le module de la fonction de transfert $\hat{h}$)*
- *retrouver le fait que c'est un filtre « passe-bas », c'est à dire qui est proche de zéro pour les hautes fréquences et conserve les basses fréquences.*

Remarques : On rappelle que toutes les suites que l'on calcule ont la propriété $h[N+n] = h[n]$ et sont donc périodiques.

Ce filtre est communément appelé filtre passe-bas idéal.

Exercice 2 (*Filtre gaussien*)

On se propose maintenant d'étudier le filtre dont la réponse impulsionnelle h dépend d'un paramètre σ et est telle que pour tous $-N/2 \leq n \leq N/2 - 1$ on a

$$h[n] = e^{-\frac{n^2}{2\sigma^2}}$$

On obtient si on trace h sur $-N/2 \leq n \leq N/2 - 1$ le tracé de gauche dans la figure 1 avec $\sigma = 5$.

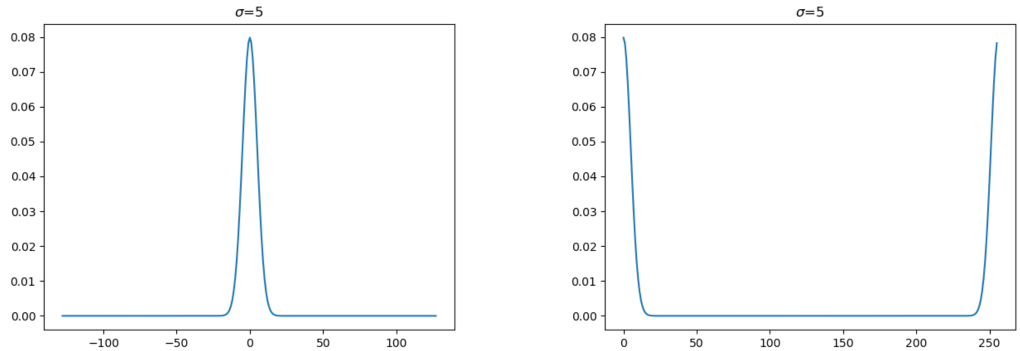

FIGURE 1 – à gauche $h[n]$ tracé pour $-N/2 \leq n \leq N/2-1$, et à droite le filtre h qui nous intéresse

Ce qui nous intéresse est la suite $h = (h[n])_{n=0,\dots,N-1}$ qui est obtenue à partir de celle qu'on vient de calculer à l'aide des outils qu'on a vu dans le TP1
Cela donne le tracé de droite de la figure 1.

On prend ici $N = 256$.
Pour les valeurs $\sigma = 1$, $\sigma = 2$, $\sigma = 5$, $\sigma = 10$.

1. *Créer le filtre h et tracer le.*
2. *Calculer et tracer le module de $\hat{h}$ en mettant la fréquence 0 au centre de l'axe des abscisses (cf TP 1).*
3. *Ce filtre est-il passe-bas ou alors passe-haut ?*

Exercice 3 (*Restauration*)

1. *Écouter le signal `Glock.wav`, transformer le signal en un vecteur x, le visualiser.*
2. *Tracer le module de sa transformée de Fourier discrète $\hat{x}$ à l'aide de la méthode vue en TP1.*
3. *Pour $\sigma = 2.7$ filtrer le signal x à l'aide du filtre de l'exercice 3 pour obtenir $y_1 = h \star x$.*

   Cela revient à faire les opérations
   — *calculer $\hat{h}$ pour $\sigma = 2.7$.*
   — *multiplier $\hat{x}$ coordonnée par coordonnée à $\hat{h}$ pour obtenir $\widehat{y_1}$.*
   — *Visualiser le module de $\widehat{y_1}$ à l'aide de la méthode vue dans le TP 1.*
   — *utiliser la transformée de Fourier inverse pour calculer $y_1 = h \star x$.*
   — *utiliser la commande `y1=y1.real` pour obtenir un vecteur avec des coordonnées réelles.*
   — *Visualiser y_1.*
   — *Transformer y_1 en un son que l'on nommera `filtrage1.wav`.*
   et écouter le résultat. Quelles sont les dégradations que vous entendez ?
4. *On veut restaurer le signal y_1 qui est une version dégradée de x.*
   Pour cela une première méthode est de filtrer le signal dégradé y_1 à l'aide du filtre K_g pour g tel que $\hat{g} = \frac{1}{\hat{h}}$.

   En effet on s'attend à obtenir $\widehat{z_1} = \hat{g}\widehat{z_1} = \frac{1}{\hat{h}}\widehat{y_1} = \frac{1}{\hat{h}}\hat{h}\hat{x} = \hat{x}$.

   Filtrer y_1 à l'aide de K_g pour obtenir z_1. Le signal x est-il restauré ?
5. *Recommencer les opérations de la question 3 avec toujours le filtre gaussien de l'exercice 3 mais cette fois avec $\sigma = 2.9$. On appelle $y_2 = h \star x$ dans ce cas.*

On veut restaurer y_2. Peut-on recommencer l'opération pratiquée dans la question 4 ? Quel est le problème ?

Certaines des valeurs propres $\hat{h}[k]$ de la matrice D sont nulles ! Donc pour éviter d'avoir à diviser par zéro, on va trouver une autre stratégie et utiliser le filtre K_{g_a} tel que pour $a > 0$ fixé et $n = 0, \dots, N-1$

$$\widehat{g_a}[n] = \frac{\overline{\hat{h}[n]}}{\left|\hat{h}[n]\right|^2 + a}$$

pour $a \sim 0$ on voit que $\widehat{g_a}[n] \sim \frac{\overline{\hat{h}[n]}}{\left|\hat{h}[n]\right|^2} \sim \frac{1}{\hat{h}[n]}$.

Filtrer le signal y_2 pour obtenir z_2 avec ce nouveau filtre K_{g_a} pour $a = 10^{-6}$. Le signal vous semble-t-il restauré ?

Remarque : n'oubliez pas de visualiser tous les éléments importants (les modules de $\widehat{g_a}$, $\widehat{z_2}$...) avec les méthodes du TP1 pour vérifier que tout se passe bien comme vous l'attendez. Et si ce n'est pas le cas il faut alors trouver le problème et le corriger, avec l'aide d'un enseignant si vous n'y arrivez pas seul-e.