Exercice I. Dans $\mathbb{R}^2$ on définit la relation $\mathcal{R}$ par : $(x, y)\mathcal{R}(x', y') \Leftrightarrow y = y'$.

1. Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence.
2. Déterminer la classe d'équivalence de $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

Exercice II. Dans $\mathbb{C}$ on définit la relation $\mathcal{R}$ par : $z\mathcal{R}z' \Leftrightarrow |z| = |z'|$.

1. Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence.
2. Déterminer la classe d'équivalence de chaque $z \in \mathbb{C}$.

Exercice III. Étudier la relation $\Re$ définie sur $\mathbb{R}^\mathbb{R}$ (l'ensemble des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$) par :

$$f \Re g \Longleftrightarrow (\exists A > 0\ \forall x \in R\ \ |x| > A \Rightarrow f(x) = g(x)).$$

Exercice IV. On définit la relation $\sim$ sur $\mathbb{Z}$ par $x \sim y \iff x^2 \equiv y^2 \pmod 5$.

1. Déterminer l'ensemble quotient.
2. Peut-on définir une addition quotient ? une multiplication quotient ?

Exercice V. Soit E un ensemble et $A \subset E$. On définit la relation sur $\mathcal{P}(E)$:

$$X \sim Y \iff X \cup A = Y \cup A.$$

1. Montrer que c'est une relation d'équivalence.
2. Soit $\phi : \mathcal{P}(E) \to \mathcal{P}(E \setminus A), X \mapsto X \setminus A$.
   Montrer que ϕ est compatible avec $\sim$ (ie que la classe de $\phi(X)$ ne dépend que de la classe de X), et que l'application quotient associée est une bijection.

Exercice VI. Soit $\mathcal{R}$ une relation sur E réflexive et transitive. On définit la relation :

$$x \sim y \iff x\mathcal{R}y \text{ et } y\mathcal{R}x$$

1. Montrer que $\sim$ est une relation d'équivalence sur E.
2. Pour $x \in E$, on note $\dot{x}$ la classe d'équivalence de x dans E. Sur $E/\sim$ on aimerait définir :
   $$\dot{x} \leq \dot{y} \iff x\mathcal{R}y$$
   Quele condition faut-il vérifier pour cela ? Montrer que cette condition est satisfaite dans le cas présent.
3. Montrer que $\leq$ est une relation d'ordre sur $E/\sim$.