Exercice I. **1.** Décomposer en produit de facteurs premiers 13215, 721, 1183.

2. Donner trois nombres qui ont exactement les mêmes diviseurs premiers et tels que aucun d'entre eux n'est multiple d'un des autres.

3. Donner toutes les pairs de nombres dont le pgcd est 143 et le ppcm est 6435.

Exercice II. **1.** Soit a, b, d trois entiers naturels. Montrer que si d divise $2a + b$ et $3a + 2b$ alors d divise a et b.

2. Trouver trois nombres entiers a, b, m strictement plus grand que 1 tels que m est multiple de $2a + b$ et $3a + 2b$ et m est premier avec a et b.

Exercice III. On considère x et y deux entiers relatifs et d un diviseur commun. On note $x = dx_1$ et $y = dy_1$.

Montrer que $d = \mathrm{pgcd}(x, y)$ si et seulement si x_1 et y_1 sont premiers entre eux.

Exercice IV. **1.** Déterminer $\mathrm{pgcd}(7696; 4144)$ de deux façons différentes : en utilisant l'algorithme d'Euclide et en utilisant la décomposition en facteurs premiers.

2. Déterminer $\mathrm{ppcm}(7696; 4144)$.

Exercice V. Soit $a, b, c \in \mathbb{Z}$ et $m \geq 0$.

1. On suppose que a divise b dans $\mathbb{Z}$. Montrer que a^m divise b^m pour tout exposant m.

2. Soit p un nombre premier divisant a^m. Montrer que p divise a. Est-ce toujours vrai si p n'est pas premier ?

3. Démontrer que si a et b divisent c et si $\mathrm{pgcd}(a, b) = 1$, alors ab divise c. Est-ce que c'est encore vrai si $\mathrm{pgcd}(a, b) \neq 1$?

Exercice VI. On appelle **nombres premiers jumeaux** un couple $(p, p+2)$ formé de deux nombres premiers.

1. Donner 4 exemples de tels couples.

2. Démontrer que si p est un nombre premier ≥ 5 tel que $p + 2$ soit également premier alors $p + p + 2$ est divisible par 12.

3. Existe-t-il trois nombres premiers de la forme $p, p + 2, p + 4$?

Exercice VII. **1.** Donner la liste des diviseurs de 3528.

2. Soit $a = 2^3 \times 3^2 \times 13^2$.

a. Calculer le nombre de diviseurs de a sans les écrire.

b. Ecrire la forme générale d'un diviseur de a. Donner alors une expression factorisée de la somme des diviseurs de a.

3. Généraliser les deux questions précédentes pour $b = p_1^{\alpha_1} \times \cdots \times p_n^{\alpha_n}$ où les p_i sont premiers et distincts deux à deux et les $\alpha_i \in \mathbb{N}^*$.

Exercice VIII. On appelle **nombre parfait** un entier naturel n tel que la somme de ses diviseurs stricts soit égale à lui-même. Par exemple, $6 = 1+2+3$ et $28 = 1+2+4+7+14$ sont des nombres parfaits.

Soit p un nombre tel que $2^p - 1$ soit premier. Montrer que $n = 2^{p-1}(2^p - 1)$ est parfait.

Exercice IX. Soit $a \in \mathbb{Z}$. Montrer $\operatorname{pgcd}(14a+3, 21a+4) = 1$, $\operatorname{pgcd}(9a+4, 2a-1) \in \{1; 17\}$.

Exercice X. **1.** Montrer qu'il n'existe pas d'entiers a et b premiers entre eux tels que $a^2 = 2b^2$. Que pouvez-vous en déduire concernant le nombre $\sqrt{2}$?

2. Montrer que $\frac{\ln 7}{\ln 5}$ est irrationnel.

Exercice XI.

On appelle *Nombre de Fermat* un entier de la forme $F_n = 2^{2^n} + 1$, où $n \geq 0$ est un entier.

i) Calculer F_0, F_1, F_2, F_3 et F_4. Montrer qu'ils sont premiers.

ii) Montrer que 641 divise F_5 (on doit ce résultat à Euler. On pourra utiliser le petit théorème de Fermat).

iii) Si $2^m + 1$ est un nombre premier, montrer que $m = 2^n$ (donc que $2^m + 1$ est un nombre de Fermat).

Exercice XII. **1.** Soit a et b deux entiers relatifs non nuls. On se propose de résoudre dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ l'équation (E) $ax + by = 1$.

a. Montrer que si (x_0, y_0) est une solution particulière de (E) alors l'ensemble des solutions de (E) est $\{(x_0 - kb, y_0 + ka) \mid k \in \mathbb{Z}\}$.

b. Résoudre dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, l'équation $314x - 159y = 1$.

2. Résoudre dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ puis dans $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$, l'équation $39x + 21y = 6$.

Exercice XIII. Le x-ème jour du y-ème mois de l'année $1900 + z$, un bateau ayant u hélices, v cheminées et w hommes d'équipage a fait naufrage. L'âge du capitaine, qui venait d'être grand père, était N. On donne la relation,

$$\sqrt[3]{N} + uvwxyz = 11\,888\,815.$$

Calculer toutes les inconnues. (On utilisera le fait que les inconnues sont des nombres entiers et on tiendra compte du sens donné à chacune d'elles, par exemple $1 \leq x \leq 31$).

Exercice XIV. On note $x = \overline{c_\ell \cdots c_0}$ l'écriture décimale d'un entier $x \in \mathbb{N}$ (c'est-à-dire que $x = c_\ell 10^\ell + \cdots + 10c_1 + c_0$).

1. Montrer la « **règle de 11** » : $x \equiv (-1)^\ell c_\ell + \cdots + (-1)^i c_i \cdots - c_1 + c_0 \pmod{11}$.

2. Calculer le reste de la division euclidienne de 641489 et 42813617 par 3, 9 et 11.

3. Soit $A = 2009^{2009}$, B la somme des chiffres de A, C la somme des chiffres de B et D la somme des chiffres de C. Calculer D.

Exercice XV. **1.** Montrer que pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $169 \nmid n^2 + 20n + 74$.

2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $9 \mid 2^{2n} + 15n - 1$.