

Exercice I. Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in]0, +\infty[$, on pose $I_n(x) = \int_0^{+\infty} \frac{1}{(t^2+x^2)^n} dt$.

1. Calculer la dérivée de la fonction I_n sur $]0, +\infty[$.
2. En déduire la valeur de $\int_0^{+\infty} \frac{1}{(t^2+1)^3} dt$.

Correction :

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soient a et A deux réels tels que $0 < a < A$. On considère

$$\begin{aligned} F_n : [a, A] \times \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ (x, t) &\mapsto \frac{1}{(t^2+x^2)^n} \end{aligned}$$

- Pour chaque x de $[a, A]$, la fonction $t \mapsto F_n(x, t)$ est continue par morceaux et intégrable sur $[0, +\infty[$ car $F_n(x, t) \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{t^{2n}} > 0$ avec $2n > 1$.
- La fonction F_n est admet sur $[a, A] \times [0, +\infty[$ une dérivée partielle par rapport à sa première variable x définie par :

$$\forall (x, t) \in [a, A] \times [0, +\infty[\quad \frac{\partial F_n}{\partial x}(x, t) = \frac{-2nx}{(t^2+x^2)^{n+1}}$$

De plus,

- pour chaque $x \in [a, A]$, la fonction $t \mapsto \frac{\partial F_n}{\partial x}(x, t)$ est continue par morceaux sur $[0, +\infty[$,

- pour chaque $t \in [0, +\infty[$, la fonction $x \mapsto \frac{\partial F_n}{\partial x}(x, t)$ est continue sur $[a, A]$,

- pour chaque $(x, t) \in [a, A] \times [0, +\infty[$,

$$\left| \frac{\partial F_n}{\partial x}(x, t) \right| = \frac{2nx}{(t^2+x^2)^{n+1}} \leq \frac{2nA}{(t^2+a^2)^{n+1}} = \varphi(t),$$

où la fonction φ est continue par morceaux et intégrable sur $[0, +\infty[$ car négligeable devant $\frac{1}{t^2}$ quand t tend vers $+\infty$.

D'après le théorème de dérivation des intégrales à paramètres, la fonction I_n est de classe C^1 sur $[a, A]$ et sa dérivée s'obtient par dérivation sous le signe somme. Ceci étant vrai pour tous réels a et A tels que $0 < a < A$, on a montré que la fonction I_n est de classe C^1 sur $]0, +\infty[$ et que

$$\forall x > 0, I'_n(x) = -2nx \int_0^{+\infty} \frac{1}{(t^2+x^2)^{n+1}} dt = -2nx I_{n+1}(x).$$

2. Pour $x > 0$, on a $I_1(x) = \left[\frac{1}{x} \arctan\left(\frac{t}{x}\right) \right]_0^{+\infty} = \frac{\pi}{2x}$. Ensuite, $I_2(x) = -\frac{1}{2x} I'_1(x) = \frac{\pi}{4x^3}$ puis $I_3(x) = -\frac{1}{4x} I'_2(x) = \frac{3\pi}{16x^5}$ et donc $I_3(1) = \frac{3\pi}{16}$.

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{(t^2+1)^3} dt = \frac{3\pi}{16}$$

Exercice II. Existence et calcul de $\int_0^{+\infty} e^{-t^2} \operatorname{ch}(tx) dt$ (on utilisera le résultat suivant :

$$\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}).$$

Correction :

Soit $x \in \mathbb{R}$. La fonction $t \mapsto e^{-t^2} \operatorname{ch}(tx)$ est continue sur $[0, +\infty[$. Quand t tend vers $+\infty$, $e^{-t^2} \operatorname{ch}(tx) = \frac{1}{2}(e^{-t^2+tx} + e^{-t^2-tx}) = o\left(\frac{1}{t^2}\right)$ d'après un théorème de croissances comparées

et donc la fonction $t \mapsto e^{-t^2} \operatorname{ch}(tx)$ est intégrable sur $[0, +\infty[$. Pour $x \in \mathbb{R}$, on peut ainsi poser

$$f(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t^2} \operatorname{ch}(tx) dt$$

Calcul de $f(x)$. Soit $A > 0$. On pose $\Phi : [-A, A] \times [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$
 $(x, t) \mapsto e^{-t^2} \operatorname{ch}(tx)$.

- Pour chaque $x \in [-A, A]$, la fonction $t \mapsto e^{-t^2} \operatorname{ch}(tx)$ est continue par morceaux et intégrable sur $[0, +\infty[$.
- La fonction Φ admet sur $[-A, A] \times [0, +\infty[$ une dérivée partielle par rapport à sa première variable définie par :

$$\forall (x, t) \in [-A, A] \times [0, +\infty[, \frac{\partial \Phi}{\partial x}(x, t) = te^{-t^2} \operatorname{sh}(tx).$$

De plus,

- pour chaque $x \in [-A, A]$, la fonction $t \mapsto \frac{\partial \Phi}{\partial x}(x, t)$ est continue par morceaux sur $[0, +\infty[$,
- pour chaque $t \in [0, +\infty[$, la fonction $x \mapsto \frac{\partial \Phi}{\partial x}(x, t)$ est continue sur $[-A, A]$,
- pour chaque $(x, t) \in [-A, A] \times [0, +\infty[$,

$$\left| \frac{\partial \Phi}{\partial x}(x, t) \right| = te^{-t^2} |\operatorname{sh}(tx)| \leq te^{-t^2} \operatorname{sh}(t|A|) = \varphi(t)$$

La fonction φ est continue par morceaux sur $[0, +\infty[$ et intégrable sur $[0, +\infty[$ car négligeable devant $\frac{1}{t^2}$ quand t tend vers $+\infty$.

D'après le théorème de dérivation des intégrales à paramètres, la fonction f est de classe C^1 sur $[-A, A]$ et sa dérivée s'obtient par dérivation sous le signe somme. Ceci étant vrai pour tout réel $A > 0$, la fonction f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f'(x) = \int_0^{+\infty} te^{-t^2} \operatorname{sh}(tx) dt$$

Soit $x \in \mathbb{R}$. On effectue maintenant une intégration par parties. Soit $A > 0$. Les deux fonctions $t \mapsto te^{-t^2}$ et $t \mapsto \operatorname{sh}(tx)$ sont de classe C^1 sur le segment $[0, A]$. On peut donc effectuer une intégration par parties et on obtient

$$\int_0^A te^{-t^2} \operatorname{sh}(tx) dt = \left[-\frac{1}{2} e^{-t^2} \operatorname{sh}(tx) \right]_0^A + \frac{x}{2} \int_0^A e^{-t^2} \operatorname{ch}(tx) dt = -\frac{1}{2} e^{-A^2} \operatorname{sh}(tA) + \frac{x}{2} \int_0^A e^{-t^2} \operatorname{ch}(tx) dt$$

Quand A tend vers $+\infty$, on obtient

$$f'(x) = \int_0^{+\infty} te^{-t^2} \operatorname{sh}(tx) dt = \frac{x}{2} \int_0^{+\infty} e^{-t^2} \operatorname{ch}(tx) dt = \frac{x}{2} f(x)$$

En intégrant l'équation différentielle $y' = \frac{x}{2}y$ et en utilisant le fait que $f(0) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$, on obtient :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \int_0^{+\infty} e^{-t^2} \operatorname{ch}(tx) dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{x^2/4}$$

Exercice III. Existence et calcul de $\int_0^1 \frac{t-1}{\ln t} t^x dt$.

Correction

Soit $x \in \mathbb{R}$. La fonction $t \mapsto \frac{t-1}{\ln t} t^x$ est continue sur $]0, 1[$.

Etude en 1. $\frac{t-1}{\ln t} t^x \underset{t \rightarrow 1}{\sim} 1 \times 1 = 1$ et donc la fonction $t \mapsto \frac{t-1}{\ln t} t^x$ se prolonge par continuité en 1. On en déduit que la fonction $t \mapsto \frac{t-1}{\ln t} t^x$ est intégrable sur un voisinage de 1 à gauche.

Etude en 0. $\frac{t-1}{\ln t} t^x \underset{t \rightarrow 0}{\sim} -\frac{t^x}{\ln t} > 0$.

-si $x > -1$, $-\frac{t^x}{\ln t} \underset{t \rightarrow 0}{=} o(t^x)$ et puisque $x > -1$, la fonction $t \mapsto \frac{t-1}{\ln t} t^x$ est intégrable sur un voisinage de 0 à droite.

- si $x \leq -1$, la fonction $t \mapsto -\frac{t^x}{\ln t}$ domine la fonction $t \mapsto -\frac{1}{t \ln t}$ quand t tend vers 0 par valeurs supérieures. Puisque la fonction $-\frac{1}{t \ln t}$ est positive et que $\int_x^{1/2} -\frac{1}{t \ln t} dt = \ln |\ln(x)| - \ln |\ln(1/2)| \xrightarrow{x \rightarrow 0} +\infty$, la fonction $t \mapsto -\frac{1}{t \ln t}$ n'est pas intégrable sur un voisinage de 0. Il en est de même de la fonction $t \mapsto \frac{t-1}{\ln t} t^x$.

Finalement, la fonction $t \mapsto \frac{t-1}{\ln t} t^x$ est intégrable sur $]0, 1[$ si et seulement si $x > -1$. Pour $x > -1$, on peut poser $f(x) = \int_0^1 \frac{t-1}{\ln t} t^x dt$.

Calcul de $f(x)$. Soit $a > -1$. On pose

$$\begin{aligned} \Phi : [a, +\infty[\times]0, 1[&\rightarrow \mathbb{R} \\ (x, t) &\mapsto \frac{t-1}{\ln t} t^x \end{aligned}$$

• Pour chaque $x \in [a, +\infty[$, la fonction $t \mapsto \frac{t-1}{\ln t} t^x$ est continue par morceaux et intégrable sur $]0, 1[$.

• La fonction Φ admet sur $[a, +\infty[\times]0, 1[$ une dérivée partielle par rapport à sa première variable définie par :

$$\forall (x, t) \in [a, +\infty[\times]0, 1[\quad \frac{\partial \Phi}{\partial x}(x, t) = (t-1)t^x = t^{x+1} - t^x$$

De plus,

- pour chaque $x \in [a, +\infty[$, la fonction $t \mapsto \frac{\partial \Phi}{\partial x}(x, t)$ est continue par morceaux sur $]0, 1[$,

- pour chaque $t \in]0, 1[$, la fonction $x \mapsto \frac{\partial \Phi}{\partial x}(x, t)$ est continue sur $[a, +\infty[$,

- pour chaque $(x, t) \in [a, +\infty[\times]0, 1[$,

$$\left| \frac{\partial \Phi}{\partial x}(x, t) \right| = (1-t)t^a = \varphi(t)$$

La fonction φ est continue par morceaux sur $]0, 1[$ et intégrable sur $]0, 1[$ car $a > -1$.

D'après le théorème de dérivation des intégrales à paramètres, la fonction f est de classe C^1 sur $[a, +\infty[$ et sa dérivée s'obtient par dérivation sous le signe somme. Ceci étant vrai pour tout réel $a > -1$, la fonction f est de classe C^1 sur $] -1, +\infty[$ et

$$\forall x > -1 \quad f'(x) = \int_0^1 (t-1)t^x dt = \left[\frac{t^{x+2}}{x+2} - \frac{t^{x+1}}{x+1} \right]_0^1 = \frac{1}{x+2} - \frac{1}{x+1}$$

Par suite, il existe $C \in \mathbb{R}$ tel que $\forall x > -1$, $f(x) = \ln\left(\frac{x+2}{x+1}\right) + C$ (*)

Pour déterminer la constante C , on évalue $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

La fonction $g : t \mapsto \frac{t-1}{\ln t}$ est continue sur le segment $]0, 1[$, prolongeable par continuité en 0 et en 1 en posant $g(0) = 0$ et $g(1) = 1$. On en déduit que cette fonction est bornée sur l'intervalle $]0, 1[$ (car son prolongement est une fonction continue sur un segment).

Soit M un majorant de la fonction $|g|$ sur $]0, 1[$. Pour $x > -1$, on a

$$|g(x)| \leq M \int_0^1 t^x dt = \frac{M}{x+1}$$

Ceci montre que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ et en passant à la limite quand x tend vers $+\infty$ dans l'égalité (*), on obtient $C = 0$. On a donc montré que

$$\forall x > -1 \quad \int_0^1 \frac{t-1}{\ln t} t^x dt = \ln\left(\frac{x+2}{x+1}\right)$$

Remarque : Pour $x = 0$, on obtient $\int_0^1 \frac{t-1}{\ln t} dt = \ln 2$.

Exercice IV. (Examen final mai 2014)

Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose $F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\arctan(xt)}{1+t^2} dt$.

1. Montrer que F est définie et continue sur $\mathbb{R}_+$.

Correction :

On note $f(x, t) = \frac{\arctan(xt)}{1+t^2}$. Cette fonction est bien définie sur $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+^*$. Pour tout $t \in \mathbb{R}_+^*$, la fonction $f(\cdot, t) : x \mapsto f(x, t)$ est continue sur $\mathbb{R}_+$. Pour tout x fixé dans $\mathbb{R}_+$, la fonction $f(x, \cdot) : t \mapsto f(x, t)$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$. Elle est aussi intégrable sur cet intervalle car majorée par $\phi_0 : t \mapsto \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{1+t^2}$, qui est intégrable. Grâce au théorème de continuité des intégrales à paramètre, on déduit que F est définie et continue sur $\mathbb{R}_+$.

2. Calculer $F(0)$ et $F(1)$.

Correction :

$$F(0) = 0, F(1) = \int_0^{+\infty} \frac{\arctan(t)}{1+t^2} dt = \left[\frac{1}{2} \arctan(t)^2 \right]_0^{+\infty} = \frac{\pi^2}{8}$$

3. Montrer que F est croissante. Dédurre qu'elle a une limite finie en $+\infty$ et la calculer.

Correction :

Soient $x \leq y$ et $t > 0$. Alors $xt \leq yt$ et par croissance de $\arctan$ sur $\mathbb{R}$, on a $\arctan(xt) \leq \arctan(yt)$ et donc $\frac{\arctan(xt)}{1+t^2} \leq \frac{\arctan(yt)}{1+t^2}$. En intégrant vis-à-vis de t sur $\mathbb{R}_+^*$, on obtient $F(x) \leq F(y)$. On a ainsi montré que F est croissante sur $\mathbb{R}_+$. Pour montrer qu'elle admet une limite finie en $+\infty$, prenons $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de réels convergeant vers $+\infty$, et posons $f_n(t) = f(x_n, t)$. Chacune des fonctions f_n

est continue intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$, majorée par ϕ_0 définie en question 1. De plus, pour $t > 0$ fixé, $f_n(t)$ tend vers $\phi_0(t)$ lorsque n tend vers $+\infty$. On peut donc appliquer le théorème de convergence dominée pour déduire que la suite $(\int_0^{+\infty} f_n(t) dt)_{n \in \mathbb{N}}$ converge et que :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{+\infty} f_n(t) dt = \int_0^{+\infty} \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{1+t^2} dt$$

c'est-à-dire

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} F(x_n) = \frac{\pi^2}{4}$$

Remarque : En choisissant $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ croissante, on aurait aussi pu conclure en appliquant le théorème de convergence monotone.

4. Montrer que F est de classe C^1 sur $]0, +\infty[$ et que pour tout $x > 0$, on a :

$$F'(x) = \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} \frac{du}{(1+x^2u)(1+u)}$$

Correction :

Pour montrer que F est de classe C^1 sur $]0, +\infty[$, on cherche à appliquer le théorème de dérivation des intégrales à paramètre. Toutes les hypothèses pour son application ont déjà été vérifiées à la question 1, sauf en ce qui concerne la dérivée partielle $\frac{\partial f}{\partial x}$. Cette dernière est bien définie sur $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+^*$ et vaut, sur cet ensemble :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, t) = \frac{1}{1+t^2} \cdot \frac{t}{1+x^2t^2}$$

Il est clair que les fonctions partielles $\frac{\partial f}{\partial x}(\cdot, t)$ et $\frac{\partial f}{\partial x}(x, \cdot)$ sont respectivement continue sur $\mathbb{R}_+$ et continue par morceaux sur $\mathbb{R}_+^*$. Enfin, si $[a, b] \subset \mathbb{R}_+^*$, on a, pour tout $x \in [a, b]$ et tout $t > 0$:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, t) \leq \frac{1}{1+t^2} \cdot \frac{t}{1+a^2t^2}$$

Comme la fonction de droite est continue par morceaux et intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$, on peut appliquer le théorème de dérivation. On obtient ainsi que F est de classe C^1 sur $]0, +\infty[$ et que sur cet intervalle,

$$F'(x) = \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^2} \cdot \frac{t}{1+x^2t^2} dt$$

Le changement de variable $u = t^2$ donne alors directement :

$$F'(x) = \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} \frac{du}{(1+x^2u)(1+u)}$$

5. Montrer que pour tout $x > 0$ et différent de 1, on a $F'(x) = \frac{\ln x}{x^2 - 1}$. Que se passe-t-il pour $x = 1$?

Correction :

Soient $x, u > 0$, $x \neq 1$. En décomposant $\frac{1}{(1+x^2u)(1+u)}$ en éléments simples (vue comme fonction de u avec x comme paramètre), on obtient

$$\frac{1}{(1+x^2u)(1+u)} = \frac{a}{1+x^2u} + \frac{b}{1+u}$$

Des multiplications/évaluations en (-1) et $-\frac{1}{x^2}$ donnent $a = \frac{x^2}{x^2-1}$ et $b = \frac{1}{1-x^2}$. Ainsi,

$$F'(x) = \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} \frac{du}{(1+x^2u)(1+u)} = \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} \frac{x^2}{x^2-1} \cdot \frac{1}{1+x^2u} + \frac{1}{1-x^2} \cdot \frac{1}{1+u} du$$

On ne peut pas calculer l'intégrale telle quelle car les termes de la décomposition en éléments simple ne sont pas intégrables séparément en $+\infty$. En revanche, si $X > 0$, on obtient :

$$\begin{aligned} \int_0^X \frac{x^2}{x^2-1} \cdot \frac{1}{1+x^2u} + \frac{1}{1-x^2} \cdot \frac{1}{1+u} du &= \left[\frac{1}{x^2-1} \cdot \ln(1+x^2u) + \frac{1}{1-x^2} \cdot \ln(1+u) \right]_0^X \\ &= \frac{1}{x^2-1} \ln(1+x^2X) - \frac{1}{x^2-1} \cdot \ln(1+X) \\ &= \frac{1}{x^2-1} \ln \left(\frac{1+x^2X}{1+X} \right) \end{aligned}$$

Lorsque X tend vers $+\infty$, cette dernière quantité tend vers $\frac{1}{x^2-1} \ln x^2$. Ainsi :

$$F'(x) = \frac{\ln x}{x^2 - 1}$$

Lorsque $x = 1$, le résultat de la question précédente donne directement

$$F'(1) = \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} \frac{du}{(1+u)^2} = \frac{1}{2} \left[-\frac{1}{1+u} \right]_0^{+\infty} = \frac{1}{2}$$

Remarque : Ces deux résultats sont cohérents avec la continuité de F' .

6. Montrer que l'intégrale $\int_0^1 \frac{\ln t}{t^2 - 1} dt$ est bien définie et calculer sa valeur.

Correction :

Pour $t > 0$, on pose $g(t) = \frac{\ln t}{t^2-1}$. Cette fonction est continue sur $]0, 1[$. En 0^+ , elle est positive et équivalente à $-\ln t$, qui est intégrable car négligeable devant $\frac{1}{\sqrt{t}}$. En 1^- , si on pose $t = 1 - u$, elle est équivalente à $\frac{-u}{-2u+u^2} \sim \frac{1}{2}$. Elle est donc intégrable sur $]0, 1[$ et l'intégrale est bien définie.

Pour calculer sa valeur, on remarque que $\int_0^1 \frac{\ln t}{t^2 - 1} dt = \int_0^1 F'(t) dt$. Cette quantité vaut $F(1) - F(0)$, qui vaut $\frac{\pi^2}{8}$ grâce à la question 1.

7. Utiliser le résultat de la question précédente pour calculer la valeur de $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$, puis celle de $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$ (Indication : pour $t \in]0, 1[$, écrire $\frac{1}{1-t^2}$ comme somme d'une série).

Correction :

Pour $t \in]0, 1[$, on a $\frac{1}{1-t^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} t^{2n}$. Ainsi, $\int_0^1 \frac{\ln t}{t^2-1} dt = \int_0^1 \sum_{n=0}^{+\infty} -t^{2n} \ln t dt$.

La série sous l'intégrale converge simplement vers g . Ses termes sont des fonctions continues et positives sur $]0, 1[$ donc grâce au théorème de convergence monotone :

$$\int_0^1 \frac{\ln t}{t^2-1} dt = - \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^1 t^{2n} \ln t dt$$

Or,

$$\int_0^1 t^{2n} \ln t dt = \left[\frac{t^{2n+1}}{2n+1} \ln t \right]_0^1 - \int_0^1 \frac{t^{2n+1}}{2n+1} \cdot \frac{1}{t} dt = 0 - \frac{1}{2n+1} \left[\frac{t^{2n+1}}{2n+1} \right]_0^1 = -\frac{1}{(2n+1)^2}$$

On déduit :

$$\int_0^1 \frac{\ln t}{t^2-1} dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$$

On a vu précédemment que le terme de gauche vaut $\frac{\pi^2}{8}$, donc

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$$

Pour calculer $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$, on utilise :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n)^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} + \frac{1}{4} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$$

Ainsi,

$$\frac{3}{4} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$$

et

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{4}{3} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{4}{3} \cdot \frac{\pi^2}{8} = \frac{\pi^2}{6}$$