

1. **a.** Montrer qu'il existe une surjection de  $\mathbb{N}$  sur  $\mathbb{N}^2$ .  
**b.** Dédurre que  $\mathbb{N}$  et  $\mathbb{N}^2$  sont équipotents.  
**c.** Dédurre que toute union d'ensembles dénombrables est dénombrable, c'est-à-dire que si on se donne des ensembles dénombrables  $A_0, A_1, A_2, \dots$ , alors l'ensemble  $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$  est dénombrable.
2. Montrer qu'il existe une surjection de  $\mathbb{N}^k$  sur  $\mathbb{N}^{k+1}$  quel que soit  $k \in \mathbb{N}^*$ . Dédurre que  $\mathbb{N}^k$  et  $\mathbb{N}^{k+1}$  sont équipotents pour tout  $k$ , puis que  $\mathbb{N}^k$  est dénombrable pour tout  $k$ .
3. On note  $\mathbb{N}^{<\infty}$  l'ensemble  $\bigcup_{k \in \mathbb{N}} \mathbb{N}^k$ , c'est-à-dire l'ensemble des suites finies d'éléments de  $\mathbb{N}$ . Montrer que  $\mathbb{N}^{<\infty}$  est dénombrable.
4. Montrer qu'il existe une surjection de  $\{0, 1\} \times \mathbb{N}$  sur  $\mathbb{Z}$ . Dédurre que  $\mathbb{Z}$  est dénombrable.
5. Montrer qu'il existe une surjection de  $\mathbb{N}^2$  sur  $\mathbb{Q}$ . Dédurre que  $\mathbb{Q}$  est dénombrable.
6. Un nombre réel est *algébrique* s'il est racine d'un polynôme à coefficients dans  $\mathbb{Q}$ . Montrer que l'ensemble des nombres algébriques est dénombrable.
7. **a.** Montrer que  $[0, 1[$  est équipotent à l'ensemble  $\{0, 1, \dots, 9\}^{\mathbb{N}}$  des suites de nombres naturels entre 0 et 9, privé de l'ensemble des suites constantes égales à 9 à partir d'un certain rang.  
**b.** Dédurre qu'il existe une surjection de  $\mathbb{R}$  sur  $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ , puis que  $\mathbb{R}$  n'est pas dénombrable.
8. Montrer qu'il existe un nombre réel qui n'est pas algébrique (un tel nombre est dit *transcendant*).

*Remarques :*

- a.** L'existence des nombres transcendants est due à Liouville en 1844, qui en a donné plusieurs exemples. La démonstration donnée ici date de 1874, et est due à Cantor. Elle permet d'affirmer, grâce à la théorie des ensembles, qu'il y a en "beaucoup plus" de nombres transcendants que de nombres algébriques. Elle est particulière dans le sens où elle est non-constructive, c'est-à-dire qu'elle ne permet de donner aucun exemple concret de tel nombre. A ce titre, elle a été rejetée par plusieurs mathématiciens de l'époque, et en particulier par les détracteurs de la théorie des ensembles.
- b.** La question 1 ne demande pas d'explicitier une bijection entre  $\mathbb{N}$  et  $\mathbb{N}^2$  mais il est possible de le faire. Un exemple est fourni par la fonction  $f : \mathbb{N}^2 \rightarrow \mathbb{N}$  définie par

$$f(p, q) = q + \sum_{i=0}^{p+q} i = q + \frac{(p+q)(p+q+1)}{2}$$

- c.** On a montré que  $\mathbb{R}$  n'est pas dénombrable en montrant qu'il existe une surjection de  $\mathbb{R}$  sur  $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ , mais on peut en fait montrer que  $\mathbb{R}$ ,  $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ , et même  $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ , sont équipotents.