Correction Exercice I.

1. Existence de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \left(x+2-\sqrt{x^2+4x+1}\right)\,dx$

   Pour $x \geqslant 0$, $x^2+4x+1 \geqslant 0$ et donc la fonction $f\ :\ x \mapsto x+2-\sqrt{x^2+4x+1}$ est continue sur $[0,+\infty[$. Quand x tend vers $+\infty$, $x+2--\sqrt{x^2+4x+1} = \frac{3}{x+2+\sqrt{x^2+4x+1}} \sim 32x$. Comme la fonction $x \mapsto \frac{3}{2x}$ est positive et non intégrable au voisinage de $+\infty$, f n'est pas intégrable sur $[0;+\infty[$.

2. Existence de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln x}{x+e^x}\,dx$

   La fonction $f\ :\ x \mapsto \frac{\ln x}{x+e^x}$ est continue et positive sur $]0,+\infty[$.

   • En 0, $\frac{\ln x}{x+e^x} \sim \ln x$ et donc $f(x) \underset{x\to 0}{=} o\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)$. Comme $\frac{1}{2}<1$, la fonction $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x}}$ est intégrable sur un voisinage de 0 et il en est de même de la fonction f.

   • En $+\infty$, $f(x) \sim \frac{\ln x}{e^x} = o\left(\frac{1}{x^2}\right)$. Comme $2>1$, la fonction $x \mapsto \frac{1}{x^2}$ est intégrable sur un voisinage de $+\infty$ et il en est de même de la fonction f.

   Finalement, f est intégrable sur $]0,+\infty[$.

3. Existence de $\displaystyle\int_0^{+\infty} x^{-\ln x}\,dx$

   La fonction $f\ :\ x \mapsto x^{-\ln x}$ est continue sur $]0,+\infty[$.

   • Quand x tend vers 0, $x^{-\ln x} = e^{-\ln^2 x} \to 0$. La fonction f se prolonge par continuité en 0 et est en particulier intégrable sur un voisinage de 0.

   • Quand x tend vers $+\infty$, $x^2 f(x) = \exp\left(-\ln^2 x + 2\ln x\right) \to 0$. Donc f est négligeable devant $\frac{1}{x^2}$ quand x tend vers $+\infty$ et f est intégrable sur un voisinage de $+\infty$.

   Finalement, f est intégrable sur $]0,+\infty[$.

4. Existence de $\displaystyle\int_0^{\pi/2} (\tan x)^a\,dx$

   Pour tout réel a, la fonction $f\ :\ x \mapsto (\tan x)^a$ est continue et strictement positive sur $\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$. De plus, pour tout réel x de $\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$, on a $f\left(\frac{\pi}{2}-x\right) = \frac{1}{f(x)}$.

   • **Etude en 0 à droite.** $f(x) \underset{x\to 0}{\sim} x^a$. Donc f est intégrable sur un voisinage de 0 à droite si et seulement si $a > -1$.

   • **Etude en $\frac{\pi}{2}$ à gauche.** $f(x) = \frac{1}{f\left(\frac{\pi}{2}-x\right)} \underset{x\to\frac{\pi}{2}}{\sim} \left(\frac{\pi}{2}-x\right)^{-a}$. Donc f est intégrable sur un voisinage de $\frac{\pi}{2}$ à gauche si et seulement si $a<1$.

   En résumé, f est intégrable sur $\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$ si et seulement si $-1<a<1$.

Correction Exercice II.

1. Convergence de l'intégrale impropre $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^a}\,dx$ suivant la valeur de $a \in RM_+^*$.

   La fonction $f\ :\ x \mapsto \frac{\sin x}{x^a}$ est continue sur $[1,+\infty[$.

   Soit $X>1$. Les deux fonction $x \mapsto -\cos x$ et $x \mapsto \frac{1}{x^a}$ sont de classe C^1 sur le segment $[1,X]$. On peut donc effectuer une intégration par parties et on obtient

   $$\int_1^X \frac{\sin x}{x^a}\,dx = \left[\frac{-\cos x}{x^a}\right]_1^X - a\int_1^X \frac{\cos x}{x^{a+1}}\,dx = -\frac{\cos X}{X^a} + \cos 1 - a\int_1^X \frac{\cos x}{x^{a+1}}\,dx.$$

Maintenant, $\left|\frac{\cos x}{x^{a+1}}\right| \leqslant \frac{1}{x^{a+1}}$ et puisque $a+1>1$, la fonction $x \mapsto \frac{\cos x}{x^{a+1}}$ est intégrable sur un voisinage de $+\infty$. On en déduit que la fonction $X \mapsto \int_1^X \frac{\cos x}{x^{a+1}}\,dx$ a une limite réelle quand X tend vers $+\infty$. Comme d'autre part, la fonction $X \mapsto -\frac{\cos X}{X^a} + \cos 1$ a une limite réelle quand X tend vers $+\infty$, on a montré que l'intégrale impropre $\int_1^{+\infty} f(x)\,dx$ converge en $+\infty$.

Finalement, l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^a}\,dx$ converge pour tout $a>0$.

2. Convergence de l'intégrale impropre $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{ix^2}\,dx$

Soit X un réel strictement positif. Le changement de variables $t=x^2$ suivi d'une intégration par parties fournit :

$$\int_1^X e^{ix^2}\,dx = \int_1^{X^2} \frac{e^{it}}{2\sqrt{t}}\,dt = \frac{i}{2}\left(-\frac{e^{iX}}{\sqrt{X}} + e^i - \frac{1}{2}\int_1^X \frac{e^{it}}{t^{3/2}}\,dt\right)$$

Maintenant, $\lim_{X\to+\infty} \frac{e^{iX}}{\sqrt{X}} = 0$ car $\left|\frac{e^{iX}}{\sqrt{X}}\right| = \frac{1}{\sqrt{X}}$. D'autre part, la fonction $t \mapsto \frac{e^{it}}{t^{3/2}}$ est intégrable sur $[1,+\infty[$ car $\left|\frac{e^{it}}{t^{3/2}}\right| = \frac{1}{t^{3/2}}$. Ainsi, $\int_1^{+\infty} e^{ix^2}\,dx$ est une intégrale convergente et puisque d'autre part la fonction $x \mapsto e^{ix^2}$ est continue sur $[0,+\infty[$, on a montré que l'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{ix^2}\,dx$ converge.

Remarque : On en déduit que les intégrales $\int_0^{+\infty} \cos(x^2)\,dx$ et $\int_0^{+\infty} \sin(x^2)\,dx$ sont des intégrales convergentes (intégrales de Fresnel).

Correction Exercice III.

1. Existence et calcul de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^3+1}\,dx$

Existence : On pose $f(x) = \frac{1}{x^3+1}$. La fonction f est continue, positive sur $]0,+\infty[$, continue en 0, et intégrable en $+\infty$ en vertu du critère de Riemann. Elle est donc intégrable sur $]0,+\infty[$.

Calcul : Pour calculer la valeur de l'intégrale, on la décompose en éléments simples. Après calculs, on trouve :

$$f(x) = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{x+1} - \frac{x-2}{x^2-x+1}\right)$$

Les termes ne sont pas intégrables indépendamment sur $]0,+\infty[$, donc pour intégrer cela, on intègre sur $]0,X[$ pour $X>0$, puis on fait tendre X vers $+\infty$.

Soit maintenant $X>0$. On a :

$$\int_0^X \frac{dx}{x+1} = \ln|X+1|$$

$$\int_0^X \frac{x-2}{x^2-x+1}dx = \int_0^X \frac{2x-1-3}{2(x^2-x+1)}dx = \frac{1}{2}\int_0^X \frac{2x-1}{x^2-x+1}dx - \frac{3}{2}\int_0^X \frac{1}{x^2-x+1}dx$$

Puis

$$\int_0^X \frac{2x-1}{x^2-x+1}dx = [\ln|x^2-x+1|]_0^X = \ln|X^2-X+1|$$

Et

$$\int_0^X \frac{1}{x^2-x+1}dx = \int_0^X \frac{1}{(x-\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}}dx = \int_{-\frac{\sqrt{3}}{3}}^{\frac{2X-1}{\sqrt{3}}} \frac{1}{\frac{3}{4}u^2+\frac{3}{4}}\sqrt{\frac{3}{4}}du = \frac{2\sqrt{3}}{3}\int_{-\frac{\sqrt{3}}{3}}^{\frac{2X-1}{\sqrt{3}}} \frac{1}{u^2+1}du$$

Cette dernière expression vaut : $\dfrac{2\sqrt{3}}{3}\left(\arctan\left(\dfrac{2X-1}{\sqrt{3}}\right)-\arctan\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)\right)$

Ainsi, $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{1}{x^3+1}\,dx$ vaut

$$\lim_{X\to+\infty}\frac{1}{3}\left(\ln|X+1|-\left(\frac{1}{2}\ln|X^2-X+1|-\frac{3}{2}\cdot\frac{2\sqrt{3}}{3}\left(\arctan\left(\frac{2X-1}{\sqrt{3}}\right)-\arctan\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)\right)\right)\right)$$

Mais : $\ln|X+1|-\dfrac{1}{2}\ln|X^2-X+1|=\ln\left(\dfrac{|X+1|}{\sqrt{|X^2-X+1|}}\right)\to 0$ en $+\infty$.

Donc :

$$\int_0^{+\infty}\frac{1}{x^3+1}\,dx=\lim_{X\to+\infty}\frac{\sqrt{3}}{3}\left(\arctan\left(\frac{2X-1}{\sqrt{3}}\right)+\arctan\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)\right)=\frac{\sqrt{3}}{3}\left(\frac{\pi}{2}+\arctan\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)\right)$$

Remarque : $\arctan x+\arctan\dfrac{1}{x}=\dfrac{\pi}{2}$ pour tout $x>0$.

Ainsi, $\arctan\dfrac{\sqrt{3}}{3}=\dfrac{\pi}{2}-\arctan\sqrt{3}=\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{\pi}{6}$ et

$$\int_0^{+\infty}\frac{1}{x^3+1}\,dx=\frac{\sqrt{3}}{3}\cdot\frac{2\pi}{3}=\frac{2\pi\sqrt{3}}{9}$$

2. Existence et calcul de $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{x\arctan x}{(1+x^2)^2}\,dx$

Existence : On pose $f(x)=\dfrac{x\arctan x}{(1+x^2)^2}$. Cette fonction est continue et positive sur $]0,+\infty[$. Elle est définie en 0 et est intégrable en $+\infty$ par critère de Riemann. Elle est donc intégrable sur $]0,+\infty[$.

Calcul : On commence par une intégration par parties avec

$$u'(x)=\frac{x}{(1+x^2)^2}\qquad v(x)=\arctan x$$

$$u(x)=-\frac{1}{2(1+x^2)}\qquad v'(x)=\frac{1}{1+x^2}$$

Cela donne :

$$\int_0^{+\infty}\frac{x\arctan x}{(1+x^2)^2}\,dx=\left[-\frac{1}{2(1+x^2)}\arctan x\right]_0^{+\infty}+\int_0^{+\infty}\frac{1}{2(1+x^2)^2}dx$$

Le premier terme est nul et il suffit de calculer le second. En effectuant le changement de variable $x=\tan t$, on obtient :

$$\int_0^{+\infty}\frac{1}{2(1+x^2)^2}dx=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1+\tan^2 t}{(1+\tan^2 t)^2}dt=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 t\,dt=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1+\cos 2t}{2}dt=\frac{\pi}{8}$$

D'où : $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{x\arctan x}{(1+x^2)^2}\,dx=\frac{\pi}{8}$

3. Existence et calcul de $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \sqrt{\tan x}\, dx$

Existence : On pose $f(x) = \sqrt{\tan x}$. Cette fonction est continue et positive sur $]0, \frac{\pi}{2}[$. Elle est définie en 0 et en posant $u = \frac{\pi}{2} - x$, on obtient $\sqrt{\tan x} = \sqrt{\frac{\cos u}{\sin u}} \underset{0^+}{\sim} \frac{1}{\sqrt{u}}$ qui est intégrable en 0^+. La fonction f est donc intégrable sur l'intervalle souhaité.
Calcul : On effectue tout d'abord le changement de variable $x = \arctan u$:

$$\int_0^{\pi/2} \sqrt{\tan x}\, dx = \int_0^{+\infty} \sqrt{u} \cdot \frac{du}{1+u^2}$$

On pose ensuite $\sqrt{u} = t$: $\displaystyle\int_0^{+\infty} \sqrt{u} \cdot \frac{du}{1+u^2} = \int_0^{+\infty} \frac{2t^2}{1+t^4} dt$
Puis on décompose en éléments simples. Le dénominateur se factorise en :

$$1 + t^4 = t^4 + 2t^2 + 1 - 2t^2 = (t^2+1)^2 - (\sqrt{2}t)^2 = (t^2 + 1 - \sqrt{2}t)(t^2 + 1 + \sqrt{2}t)$$

Après calculs, on obtient :

$$\frac{2t^2}{1+t^4} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{t}{t^2 - \sqrt{2}t + 1} - \frac{t}{t^2 + \sqrt{2}t + 1} \right)$$

Les termes ne sont pas intégrables indépendamment sur $]0, +\infty[$, donc pour intégrer cela, on calcule une primitive de chacun des termes, on intègre sur $]0, X[$ pour $X > 0$, et on fait tendre X vers $+\infty$.
On calcule tout d'abord $\displaystyle\int \frac{t}{t^2 - \sqrt{2}t + 1} dt$:

$$\int \frac{t}{t^2 - \sqrt{2}t + 1} dt = \int \frac{1}{2} \cdot \frac{2t - \sqrt{2} + \sqrt{2}}{t^2 - \sqrt{2}t + 1} dt = \frac{1}{2} \left(\ln(t^2 - \sqrt{2}t + 1) + \int \frac{\sqrt{2}}{t^2 - \sqrt{2}t + 1} dt \right)$$

Puis

$$\int \frac{1}{t^2 - \sqrt{2}t + 1} dt = \int \frac{1}{(t - \frac{\sqrt{2}}{2})^2 + \frac{1}{2}} dt \underset{\frac{s}{\sqrt{2}} = t - \frac{\sqrt{2}}{2}}{=} \int \frac{1}{\frac{s^2}{2} + \frac{1}{2}} \frac{ds}{\sqrt{2}} = \sqrt{2} \int \frac{1}{s^2+1} ds = \sqrt{2} \arctan s + K$$

Soit $\displaystyle\int \frac{t}{t^2 - \sqrt{2}t + 1} dt = \frac{1}{2} \left(\ln(t^2 - \sqrt{2}t + 1) + 2 \arctan(\sqrt{2}t - 1) \right) + K'$.
De même : $\displaystyle\int \frac{t}{t^2 + \sqrt{2}t + 1} dt = \frac{1}{2} \left(\ln(t^2 + \sqrt{2}t + 1) - 2 \arctan(\sqrt{2}t + 1) \right) + L$.
Ainsi,

$$\int \frac{2t^2}{1+t^4} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{2} \left(\ln \left(\frac{t^2 - \sqrt{2}t + 1}{t^2 + \sqrt{2}t + 1} \right) + 2 \arctan(\sqrt{2}t - 1) + 2 \arctan(\sqrt{2}t + 1) + M \right)$$

Et

$$\int_0^{\pi/2} \sqrt{\tan x}\, dx = \int_0^{+\infty} \frac{2t^2}{1+t^4} = \frac{\pi\sqrt{2}}{2}$$

Correction Exercice IV.

1. Existence et calcul de $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{(1-x)(1+ax)}}\,dx$

   Existence :

   On note $\phi_a(x) = (1-x)(1+ax)$ et $f_a(x) = \frac{1}{\sqrt{(1-x)(1+ax)}}$.

   Pour que l'intégrale soit définie, il faut tout d'abord que ϕ_a soit strictement positive sur $]0,1[$. Pour étudier cela, on distingue deux cas : $a = 0$ et $a \neq 0$.

   Si $a = 0$, $\phi_a(x) = (1-x)$ qui est bien strictement positive sur $]0,1[$.

   Si $a \neq 0$, ϕ_a est un trinôme du second degré de racines 1 et $-1/a$. Si $a < 0$, ϕ_a est positive hors de l'intervalle formé par ses racines, et ϕ_a est strictement positive sur $]0,1[$ lorsque $-1/a \geq 1$, c'est-à-dire $a \geq -1$. Si $a > 0$, ϕ_a est positif dans l'intervalle formé par ses racines, et ϕ_a est strictement positive sur $]0,1[$ lorsque $-1/a \leq 0$, ce qui est satisfait.

   On suppose donc désormais $a \geq -1$ et on peut passer à l'étude de l'intégrabilité.

   En 0^+, f_a est définie.

   En 1^-, il faut encore distinguer les cas $a = 0$ et $a \neq 0$. Si $a = 0$, alors $f_a(x) \underset{1^-}{\sim} \frac{1}{\sqrt{1-x}}$, qui est intégrable en 1^- par le critère de Riemann. Si $a \neq 0$, $f_a(x) \underset{1^-}{\sim} \frac{1}{\sqrt{(1-x)(1-a)}}$ si $a \neq -1$, et ceci est intégrable par critère de Riemann. Si en revanche $a = -1$, alors $f_a(x) = \frac{1}{\sqrt{(1-x)^2}} = \frac{1}{|1-x|}$ qui n'est pas intégrable en 1^-.

   En conclusion, l'intégrale est bien définie pour $a \in]-1, +\infty[$.

   Calcul :

   On suppose ici que $a \neq 0$ car le cas $a = 0$ est (presque) évident.

   On met ϕ_a sous forme canonique. Après calcul, on obtient

$$\phi_a(x) = -a\left(\left(x + \frac{1-a}{2a}\right)^2 - \left(\frac{1+a}{2a}\right)^2\right)$$

   On note $\alpha = \frac{1+a}{2a}$ et on effectue le changement de variable $u = x + \frac{1-a}{2a}$. Alors :

$$\int_0^1 f_a(x)dx = \int_{\frac{1-a}{2a}}^{\frac{1+a}{2a}} \frac{du}{\sqrt{-a(u^2-\alpha^2)}}$$

   La suite du calcul dépend du signe de a.

   Si $a > 0$, alors

$$\int_0^1 f_a(x)dx = \frac{1}{\sqrt{a}} \int_{\frac{1-a}{2a}}^{\frac{1+a}{2a}} \frac{du}{\sqrt{\alpha^2-u^2}}$$

   Puis, en posant $u = \alpha v$, on obtient

$$\int_0^1 f_a(x)dx = \frac{1}{\sqrt{a}} \int_{\frac{1-a}{1+a}}^{1} \frac{\alpha dv}{|\alpha|\sqrt{1-v^2}} = \frac{1}{\sqrt{a}} \left[\arcsin v\right]_{\frac{1-a}{1+a}}^{1} = \frac{1}{\sqrt{a}} \left(\frac{\pi}{2} - \arcsin\left(\frac{1-a}{1+a}\right)\right)$$

   Si $a < 0$, alors

$$\int_0^1 f_a(x)dx = \frac{1}{\sqrt{-a}} \int_{\frac{1-a}{2a}}^{\frac{1+a}{2a}} \frac{du}{\sqrt{u^2-\alpha^2}}$$

Puis, en posant $u = \alpha v$, on obtient

$$\int_0^1 f_a(x)dx = \frac{1}{\sqrt{-a}} \int_{\frac{1-a}{1+a}}^1 \frac{\alpha dv}{|\alpha|\sqrt{v^2-1}} = -\frac{1}{\sqrt{-a}} \left[\ln(v+\sqrt{v^2-1})\right]_{\frac{1-a}{1+a}}^1$$

Soit

$$\int_0^1 f_a(x)dx = \frac{1}{\sqrt{-a}} \ln\left(\frac{1-a}{1+a} + \sqrt{\left(\frac{1-a}{1+a}\right)^2 - 1}\right)$$

2. Existence et calcul de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{(e^x+1)(e^{-x}+1)}\,dx$

Existence : Pas de problème d'intégrabilité : l'intégrande est continue et positive ; elle admet une limite finie en 0, et est intégrable en $+\infty$ grâce au critère de Riemann.
Calcul :

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{(e^x+1)(e^{-x}+1)}\,dx = \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+e^x+e^{-x}+1}\,dx = \int_0^{+\infty} \frac{e^x}{e^{2x}+2e^x+1}\,dx$$

Avec $u = e^x$, cette dernière intégrale devient :

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{u^2+2u+1}\,du = \int_1^{+\infty} \frac{1}{(u+1)^2}\,du = \left[-\frac{1}{u+1}\right]_1^{+\infty} = \frac{1}{2}$$

3. Existence et calcul de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{5\mathrm{ch}x+3\mathrm{sh}x+4}\,dx$

Existence : Pas de problème d'intégrabilité : l'intégrande est continue et positive ; elle admet une limite finie en 0, et est intégrable en $+\infty$ grâce au critère de Riemann.
Calcul : On commence par revenir à une écriture exponentielle :

$$5\mathrm{ch}x+3\mathrm{sh}x+4 = \frac{1}{2}(5e^x+5e^{-x}+3e^x-3e^{-x}+8) = \frac{1}{2}(8e^x+2e^{-x}+8) = e^{-x}(4e^{2x}+4e^x+1)$$

L'intégrale cherchée vaut donc $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^x}{4e^{2x}+4e^x+1}dx$, qui, après le changement de variable $u = e^x$, devient

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{4u^2+4u+1}du = \int_1^{+\infty} \frac{du}{4(u+\frac{1}{2})^2} = \left[-\frac{1}{4(u+\frac{1}{2})}\right]_1^{+\infty} = \frac{1}{6}$$

Correction Exercice V.

Equivalent simple quand x tend vers $+\infty$ de $e^{x^2}\displaystyle\int_x^{+\infty} e^{-t^2}\,dt$:

La fonction $t \mapsto e^{-t^2}$ est continue, positive et intégrable sur $[0,+\infty[$. En écrivant $e^{-t^2} = -\frac{1}{2t}(-2t)e^{-t^2}$ et en intégrant par parties, on obtient :

$$\int_x^{+\infty} e^{-t^2}\,dt = \left[-\frac{1}{2t}e^{-t^2}\right]_x^{+\infty} - \int_x^{+\infty} \frac{1}{2t^2}e^{-t^2}\,dt = \frac{1}{2x}e^{-x^2} - \int_x^{+\infty} \frac{1}{2t^2}e^{-t^2}\,dt$$

Par théorème de sommation des relations de comparaison,

$$\int_x^{+\infty} \frac{1}{2t^2}e^{-t^2}\,dt = \underset{x\to+\infty}{o}\left(\int_x^{+\infty} e^{-t^2}\,dt\right)$$

Donc,

$$\int_x^{+\infty} e^{-t^2}\,dt \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2x}e^{-x^2}$$

et donc

$$e^{x^2}\int_x^{+\infty} e^{-t^2}\,dt \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2x}$$