Le hasard dans l'enseignement mathématiques

Oriane JAMMET-REYNAL
Damien JOSEPH

Avril 2019
M2 MEEF Mathématiques - Aix Marseille Université

Table des matières

Introduction 2
I. Notion de Hasard 3
A) Origine et définitions 3
B) Conception humaine du hasard 4
C) Présentation du hasard dans l'enseignement au cycle 4 5
II. Générateurs de hasard 6
A) Fonctionnement 6
B) Vérification 6
C) Algorithmes Congruentiels linéaires 7
D) Conclusion 9
III. Utilisation du hasard dans l'enseignement (exemples d'applications) 10
A) Modéliser une expérience pour conjecturer un résultat 10
B) Méthode de Monte Carlo pour estimer une intégrale 11
C) Expérience de l'aiguille de Buffon pour approximer le nombre pi 13
D) Modèle des urnes d'Ehrenfest et théorie des graphes 19
IV. Bibliographie 20

Introduction

Étudiants en seconde année de master MEEF mathématiques, nous avons choisi d'étudier, au sein de l'UE 32C, l'utilisation du hasard dans l'enseignement en mathématiques au cycle 4.

Avant d'aborder le hasard en classe, il est nécessaire que l'enseignant soit sensibilisé à la perception déformée que les élèves peuvent avoir du hasard. Ainsi, il sera plus vigilant sur les termes à utiliser, et les expériences à proposer aux élèves pour défaire ces perceptions.

Dans notre étude, nous proposons une approche théorique et philosophique du hasard, qui nous introduit à un vaste domaine de réflexion philosophique. Ensuite, nous détaillerons quelques systèmes de génération de nombres aléatoires, puis proposerons des utilisations de ces générateurs à différents niveaux de classe.

I. Notion de Hasard

A) Origine et définitions

Étymologiquement, le mot hasard provient de l'arabe classique « yasara » qui signifie « jouer aux dés », ou yasar, « groupe de joueurs de dés ». D'après le CNRTL (Centre National de Ressources Textuelles et Lexicale) le mot a pris de nombreuses autres significations au fil du temps, portant une signification subjective de risque (avec le mot « hasardeux ») ou de chance.

Les philosophes de tous temps se sont intéressés à en donner une définition :

- P.S. Laplace (18^{e} siècle), défini le hasard comme le reflet de notre ignorance. Ainsi associé à une force supérieure (divine), le hasard serait utilisé pour justifier des faits incompréhensibles par l'homme. Comme l'illustre A. Einstein, « Le hasard, c'est dieu qui se promène incognito ».
- A.A. Cournot défini le hasard comme la rencontre de plusieurs séries causales indépendantes (Vision Aristotélicienne). Ainsi, la notion de hasard serait une situation engendrée par la rencontre de causes ou faits indépendants.
- Selon Poincaré, le hasard définit « l'ignorance d'une cause très petite que nous ne pouvons pas connaître, mais qui produit un effet très grand (l'effet papillon appliqué à la météorologie), la complexité des causes qui nous interdit d'accéder à un ordre autre que statistique (comme dans la théorie cinétique des gaz) »

Alors que la science se base sur une approche déterministe des évènements et évolutions, par le principe de causalité, où chaque effet serait le résultat d'une cause qui le précède, on peut donner une définition stochastique du hasard, « lorsque le n+1^{ieme} terme ne dépend pas des n termes précédents ». Une approche déterministe du hasard serait « l'occurrence d'un effet dont on ignore les causes ».

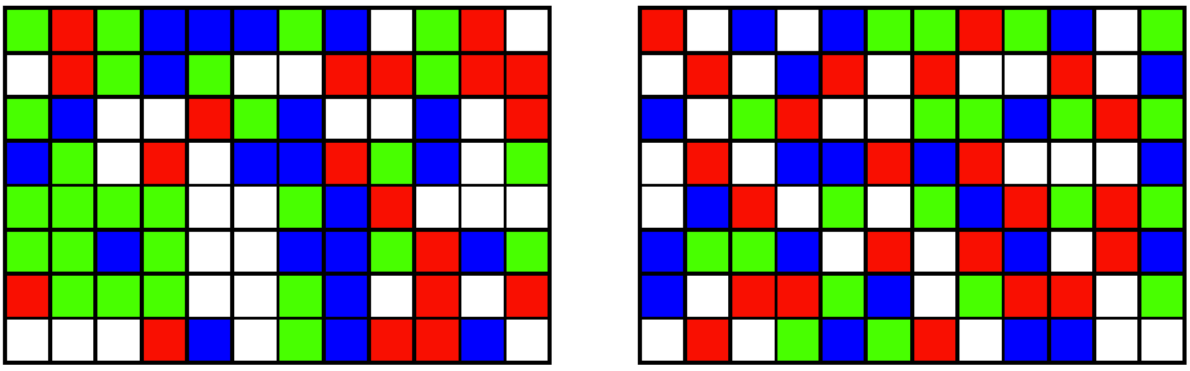
Ainsi, on s'aperçoit que la notion de hasard a fait l'objet de nombreuses recherches et réflexions, et qu'elle reste finalement floue pour notre société.

B) Conception humaine du hasard

L'Homme a une conception déformée du hasard, notamment parce que son appréciation du monde qui l'entoure est subjective. Selon Cournot, les faits de hasards ne sont pas rares, mais l'homme les considère ainsi, car il ne prête attention qu'à ceux qui, pour lui, ont un sens particulier. Comme l'écrit Cournot, «on remarquera le hasard qui a fait périr les deux frères le même jour, et l'on ne remarquera pas, ou l'on remarquera moins celui qui les a fait mourir à un mois, à trois mois, à six mois d'intervalle ; quoiqu'il n'y ait toujours aucune solidarité entre les causes qui ont amené tel jour la mort de l'aîné, et celles qui ont amené tel autre jour le mort du cadet, ni entre ces causes et leur qualité de frères » (Cournot 1843).

Pour illustrer la difficulté de concevoir pleinement le hasard, il existe une expérience (Neron, 2011) ou l'on demande à un élève de colorier une grille avec 4 couleurs différentes distribuées « au hasard », que l'on compare avec une grille générée par un moteur de hasard. Le résultat semble alors bien mieux réparti dans le cas de la grille générée par l'élève.

Exemple de grille aléatoire et de grille dessinée par un élève.



Ainsi, c'est le rôle du professeur, au cours du cycle 4, de démontrer à l'élève que ses conceptions du hasard sont parfois éloignées de l'approche scientifique, comme c'est écrit dans le programme du cycle 4 : « Dès le début et tout au long du cycle 4 sont abordées des questions relatives au hasard, afin d'interroger les représentations initiales des élèves, en partant de situations issues de la vie quotidienne (jeux, achats, structures familiales, informations apportées par les médias, etc.), en suscitant des débats. »

C) Présentation du hasard dans l'enseignement au cycle 4

Il est important de lever ces conceptions erronées du hasard, afin d'éviter l'incompréhension des élèves face à l'approche mathématique des probabilités. La notion de hasard évoluera de hasard « subit », à hasard « construit » quantifiable.
Pour présenter une approche scientifique du hasard, le professeur pourra faire observer des phénomènes aléatoires de manière rationnelle, via des protocoles expérimentaux (lancé de dés par exemple). Le professeur s'aidera d'un vocabulaire scientifique et mathématique précis.
Au cycle 4, deux types de hasard seront présentés à l'élève :

- « Le hasard du tirage au sort », avec équiprobabilité assurée par le processus de l'expérience,
- « Le hasard bénin », cause de fluctuation observée lors de nombreuses expériences aléatoires. Ce hasard s'opposera à la conception humaine du « hasard fortuit » décrit par Cournot.

Au cours du cycle 4, l'élève étudiera la notion de probabilité. C'est lors de cette séquence d'enseignement qu'il utilisera la notion de hasard. En effet, la notion de probabilité quantifie la réalisation d'un évènement lors d'une expérience, et cette réalisation dépend du hasard.
Le programme incite à approcher la notion de probabilité par l'observation de fréquences d'apparition. A ce niveau, aucune définition de probabilité ne peut être donnée (Chaput, 2010). L'utilisation d'outils statistiques permettent de décrire ou résumer les résultats des expériences aléatoires menées, alors que les probabilités permettent de modéliser les phénomènes aléatoires.

Il convient alors de définir ce qu'est une expérience aléatoire :

- c'est un processus, décrit précisément par un protocole expérimental permettant la reproductibilité dans les mêmes conditions,
- dont tous les résultats possibles (issues) sont connus, mais dont l'apparition d'une issue comme résultat de l'expérience ne peut être déterminée à l'avance.

La génération d'expériences aléatoires pouvant être fastidieuse à réaliser à la main, l'élève peut donc utiliser plusieurs outils à sa disposition pour générer des résultats d'expérience aléatoire (calculatrice, tableur, logiciel d'algorithmique, logiciel de géométrie dynamique, …). Nous allons donc étudier, dans une prochaine partie, comment le hasard peut être généré par ces outils.

II. Générateurs de hasard

A) Fonctionnement

Le fonctionnement des ordinateurs est parfaitement déterministe, ils ne sont capables que d'exécuter une suite d'instructions prédéfinies. Ainsi, un ordinateur sera incapable de « choisir » un nombre au hasard. Une possibilité serait de déterminer un nombre à partir d'un processus physique, comme la désintégration d'un élément radioactif, ou un bruit de fond, mais tous les ordinateurs n'ont pas accès à ces données. Les ordinateurs ont donc recours à des algorithmes déterministes pour simuler le hasard, et d'obtenir des nombres pseudo-aléatoires (Borderie, 2006).
Théoriquement, tous les générateurs de nombres aléatoires ont besoin d'un premier nombre, appelé « graine », auquel sera appliqué l'algorithme permettant de générer un nombre pseudo-aléatoire. Cette graine peut être générée à partir de l'heure, du temps d'accès au disque, du temps écoulé depuis l'ouverture de l'application, de la température d'un composant, de la taille d'un fichier, ou encore des mouvements de la souris.

B) Vérification

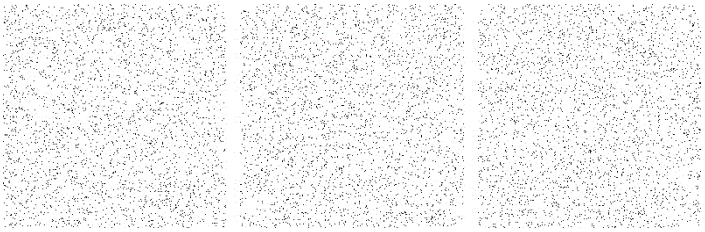
La génération de nombres doit répondre à certains critères (Blaye, 2010) :

- La fréquence d'apparition des nombres doit correspondre à une loi uniforme,
- Le nombre généré doit être indépendant du nombre généré précédemment ou suivant,
- Le générateur doit être efficace quelque soit la valeur de la graine.

Pour vérifier si les nombres générés respectent ces trois règles, on peut construire une représentation graphique. Deux manières sont possibles :

- Une série de nombres aléatoires binaires serait représentée sous forme de lignes de pixels noirs ou blanc à la suite, avec retour à la ligne,
- Une série de nombres aléatoires serait une représentation dans le plan muni d'un repère orthonormé, deux nombres aléatoires successifs représenteraient l'abscisse et l'ordonnée d'un point représenté par un pixel noir.

Dans les deux cas, un générateur qui respecterait les règles ci-dessus devrait produire, sur le long terme, un nuage de point sans aucun motif particulier.



Nuages de points aléatoires.

Pour quantifier la qualité d'un générateur de nombres aléatoires, il existe toutefois d'autres méthodes de calcul plus complexes.

C) Algorithmes Congruentiels linéaires

Un Générateur Congruentiel Linéaire est un générateur de nombre pseudo-aléatoires courant, utilisé en informatique. Il est défini par la suite mathématique suivante (Blaye, 2010) :

$$X_{n+1} = (a * X_n + c)\ mod\ m$$

Avec X_0 la graine, et a, c et m des constantes propres au générateur.

Le choix des constantes répond à certains critères. En raison de l'utilisation du reste de la division Euclidienne, les termes de la suite sont compris entre 0 et $m - 1$, la suite est donc amenée à se répéter. La génération de nombres aléatoires consécutifs n'est pas indépendante : X_{n+1} dépend de X_n. Il faut alors prendre garde à ce qu'un nombre n'apparaisse pas 2 fois avec une trop petite période, car les périodes sont identiques.
Pour que la période soit la plus grande possible, soit, égale à m, Donald E. Knuth établi que les constantes doivent respecter les critères suivants

- si $c \neq 0$:
  - c et m premiers entre eux (PGCD de c et m égal à 1),
  - Pour tout nombre premier p divisant m, $a - 1$ soit un multiple de p,
  - $a - 1$ soit un multiple de 4 si m est un multiple de 4,
- Si $c = 0$:
  - m est premier,
  - $m - 1$ est le plus petit entier tel que $(am - 1\ - 1) mod\ (m) =\ 0$.

De plus, comme le calcul de la suite fait intervenir une division euclidienne, ce qui peut rendre le calcul assez long, on prendra une valeur de m de type 2^k ou $2^k - 1$ avec k un nombre entier naturel, car comme les ordinateurs calculent en base binaire, cela raccourcit le temps de calcul.

Les qualités de cet algorithme sont :

- Sa simplicité de mise en œuvre,
- Sa rapidité d'exécution,
- La reproductibilité liée à la graine utilisée,

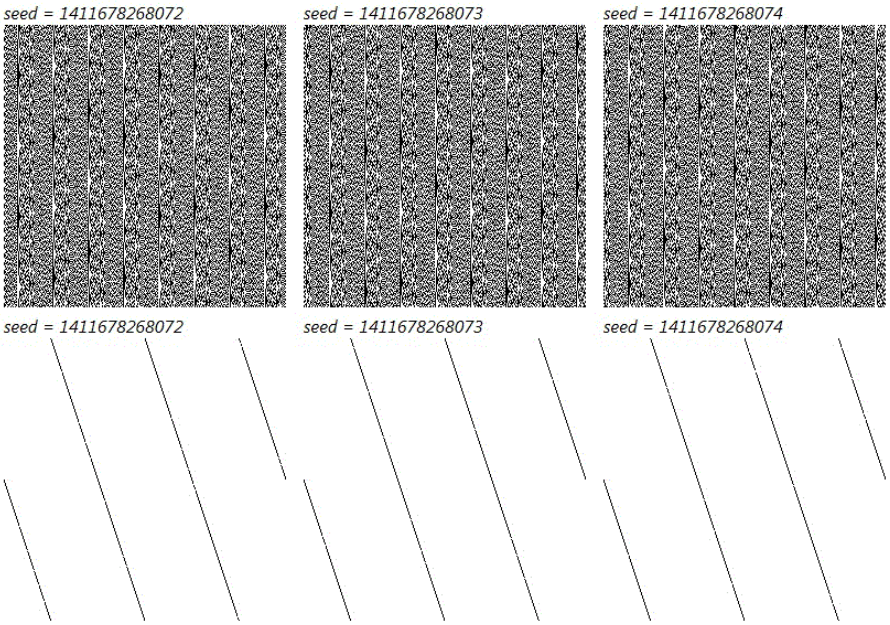
Toutefois, il admet une limite : les constantes doivent être choisies selon certaines contraintes pour répondre aux critères attendus d'un générateur de nombres pseudo-aléatoires.

Le générateur de nombres aléatoires « RANDU », programmé par IBM, utilisait les constantes suivantes :

$$X_{n+1} = (65539 * X_n + 0)\ mod\ 2^{31}$$

Alors que la constante c est nulle, la constante m n'est pas un nombre premier (Non-respect des critères définis par Donald E. Knuth).

Voici ci-dessous une représentation graphique des nombres aléatoires générés (en haut une représentation de nombres aléatoires binaires, en bas de nombres aléatoires entiers) en fonction de différentes graines :

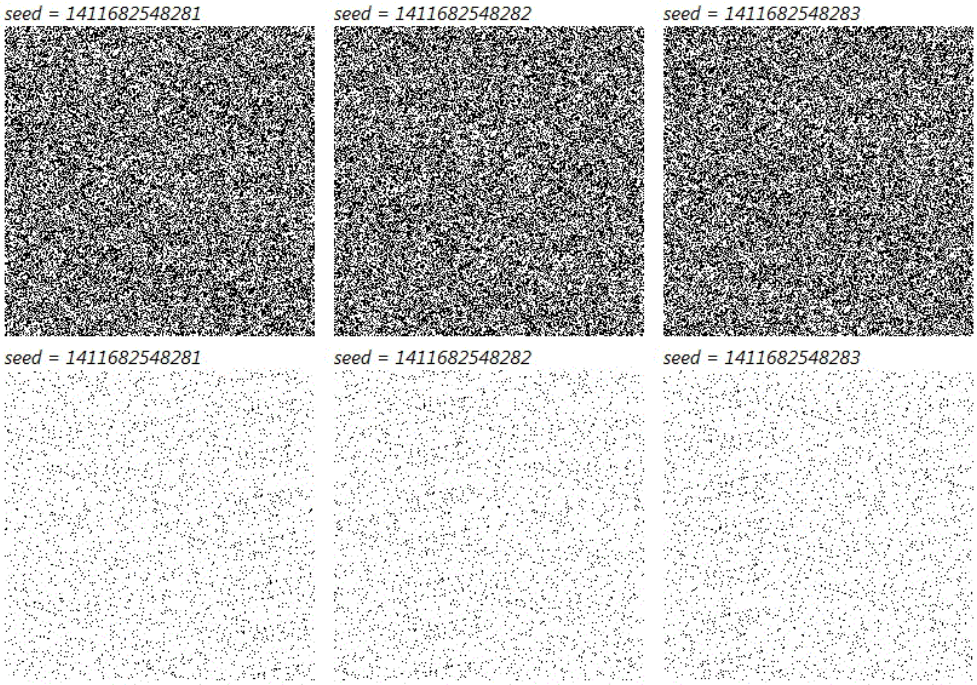


Les motifs mis en évidence sur ces représentations prouvent que ce générateur produit des nombres aléatoires trop réguliers.

Le générateur « Central Randomizer » développé par Hool**,** utilise les constantes suivantes :

$$X_{n+1} = (9301 * X_n + 49297)\ mod\ 233280$$

Ces constantes respectent les critères de Knuth énoncés ci-dessus. Les représentations graphiques ci-dessous des nombres aléatoires générés (en haut une représentation de nombres aléatoires binaires, en bas de nombres aléatoires entiers) ne fait apparaitre aucun motif particulier :



Par ailleurs, cet algorithme ayant une constante m plus petite, il permet donc un calcul plus rapide des nombres aléatoires.

Le générateur « Standard minimal » (Blaye, 2010) utilise les constantes suivantes :

$$X_{n+1} = (16807 * X_n + 0)\ mod\ 2^{31} - 1$$

Les constantes respectent les critères de Knuth énoncés ci-dessus.

Les générateurs Congruentiel Linéaires sont donc des outils faciles d'accès et rapides d'exécution pour les ordinateurs, mais ne fournissent pas des nombres aléatoires de bonne qualité quelque-soit leurs constantes.

Sur la même base de congruences, d'autres générateurs (utilisant des matrices, ou additionnant des suites de constantes et termes de la suite X_n) existent et fournissent des suites de nombres aléatoires de qualité (Tausworthe, Fibonacci, Mersenne Twister, …). Toutefois, ces générateurs ont une limite, celle de pouvoir prédire les termes suivants de la suite générée. Des algorithmes permettent en effet de retrouver les polynômes caractéristiques des générateurs, et donc de remonter jusqu'à la graine. Ces générateurs ne sont donc pas être utilisés dans des domaines plus exigeants, comme en cryptographie.

D) Conclusion

En informatique, on devra donc se contenter de « pseudo-hasard ». Si l'on veut obtenir une série de nombres réellement aléatoires, il faudra se tourner vers la physique. Par exemple, en avril 2014, une équipe internationale de physiciens a montré qu'il était possible, en mesurant l'état quantique de deux atomes d'ytterbium émettant des photons, de produire des séquences de plusieurs dizaines de nombres purement aléatoires (Ikonicoff, 2015).

III. Utilisation du hasard dans l'enseignement (exemples d'applications)

Le programme de mathématiques du cycle 4 publié en 2018 précise « L'utilisation d'outils comme le tableur, la calculatrice, un logiciel de géométrie dynamique ou de programmation permet de gérer des données réelles ou expérimentales, de faire des représentations et des simulations, (…) ». On retrouve également la simulation dans la compétence Modéliser : « Comprendre et utiliser une simulation numérique ou géométrique ». Ainsi, l'utilisation de générateur de hasard lors de simulations doit être présenté et maitrisé par les élèves.
Il est toutefois essentiel de faire réaliser concrètement les expériences aléatoires aux élèves en amont de la simulation, afin qu'ils comprennent et maitrisent leur modélisation, et notamment l'intervention du hasard.

A) Modéliser une expérience pour conjecturer un résultat

Une première utilité d'un générateur de nombres aléatoires est de permettre de reproduire un grand nombre de fois une expérience identique, et donc d'approcher dès le collège une définition fréquentiste d'une probabilité.

Un élève qui découvre l'approche fréquentiste des probabilités, pourra être impressionné par l'effet du « hasard bénin » sur un faible nombre d'expérience aléatoire.
Si l'on propose aux élèves de lancer une pièce équilibrée, et de relever le nombre de fois où le résultat « pile » apparait sur la face supérieure, il est fort probable que les élèves obtiennent des résultats parfois éloignés de la probabilité (1/2), et que les élèves obtiennent entre eux des résultats très différents. Ils pourront être déstabilisés par ces résultats. La simulation permettra alors d'obtenir un grand nombre de résultats pour l'expérience aléatoire, et donc une fréquence d'apparition d'une issue donnée plus proche de la probabilité.

Fréquences d'apparition après 10 lancés

	A	B	C	D	E	F
1	Numéro du lancé	Pile Ou Face		Nombre d'apparitions de "Pile"	Nombre d'apparitions de "Face"	Nombre de Lancer
2	1	Face		3	7	10
3	2	Face				
4	3	Pile				
5	4	Pile		Fréquence d'apparition des piles :		0,3
6	5	Face		Fréquence d'apparition des faces :		0,7
7	6	Face				
8	7	Face				
9	8	Face				
10	9	Pile				
11	10	Face				
12	11					

Fréquences d'apparition après 100 000 lancés

	A	B	C	D	E	F
1	Numéro du lancé	Pile Ou Face		Nombre d'apparitions de "Pile"	Nombre d'apparitions de "Face"	Nombre de Lancer
2	1	Face		50154	49846	100000
3	2	Face				
4	3	Face				
5	4	Face		Fréquence d'apparition des piles :		0,50154
6	5	Face		Fréquence d'apparition des faces :		0,49846
7	6	Face				
8	7	Pile				
9	8	Pile				
10	9	Face				
11	10	Face				
12	11	Face				

De la même façon, on peut proposer aux élèves l'expérience aléatoire suivante : lancer deux pièces équilibrées et relever les résultats (deux piles, deux faces ou une pile et une face). L'élève, pourra dans un premier temps penser que les issues sont équiprobables et auront donc une probabilité de $\frac{1}{3}$.

Fréquences d'apparition après 10 lancés

Numéro du lancé	Pièce 1	Pièce 2	Somme des dés	Nombre de Lancer	Résultats	Nombre d'apparitions	Fréquence d'apparitions(En écriture décimales)	Fréquence d'apparitions(E pourcentage)
1	Pile	Face	PF	10	Pile et Pile	0		
2	Pile	Face	PF		Pile et Face	7	0,7	70,00%
3	Pile	Face	PF		Face et Face	3	0,3	30,00%
4	Face	Pile	PF					
5	Face	Pile	PF					
6	Pile	Face	PF					
7	Face	Face	FF					
8	Face	Face	FF					
9	Pile	Face	PF					
10	Face	Face	FF					
11								

Fréquences d'apparition après 100 000 lancés

Numéro du lancé	Pièce 1	Pièce 2	Somme des dés	Nombre de Lancer	Résultats	Nombre d'apparitions	Fréquence d'apparitions(En écriture décimales)	Fréquence d'apparitions(E pourcentage)
1	Face	Pile	PF	100 000	Pile et Pile	25035	0,25035	25,04%
2	Pile	Pile	PP		Pile et Face	50114	0,50114	50,11%
3	Pile	Face	PF		Face et Face	24851	0,24851	24,85%
4	Pile	Face	PF					
5	Pile	Pile	PP					
6	Face	Face	FF					
7	Pile	Pile	PP					
8	Face	Face	FF					
9	Face	Pile	PF					
10	Face	Face	FF					
11	Pile	Face	PF					

Une simulation d'un grand nombre de lancés pourra donc mettre en doute la validité de son modèle et l'inciter à rechercher un autre modèle, qui pourra être illustré par les résultats de l'expérience. Attention ici à garder à l'esprit que l'utilisation d'un outil informatique en ce sens ne permet que de produire ou vérifier des conjectures, et non démontrer la validité d'un modèle.

B) Méthode de Monte Carlo pour estimer une intégrale

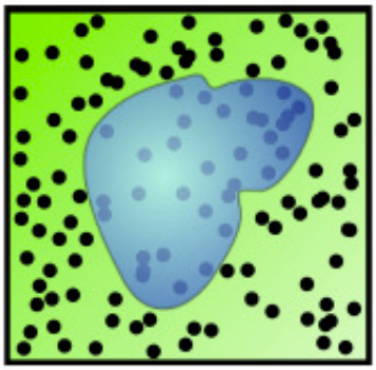
Une autre application des générateurs de hasard peut nous permettre d'estimer la valeur d'une aire, ou encore d'une intégrale d'une fonction.

Pour une première approche, on peut prendre l'exemple d'un lac, dont on souhaite estimer la superficie.

On dessine une zone rectangulaire qui l'encadre, dont on connait les longueurs des côtés (et donc l'aire). On lance ensuite N boulets de canon dans la zone rectangulaire, de manière « aléatoire », puis on compte le nombre n de boulets encore sur terre (et non tombés dans le lac). On peut ensuite déterminer le nombre k de boulets tombés dans le lac, k = N - n.

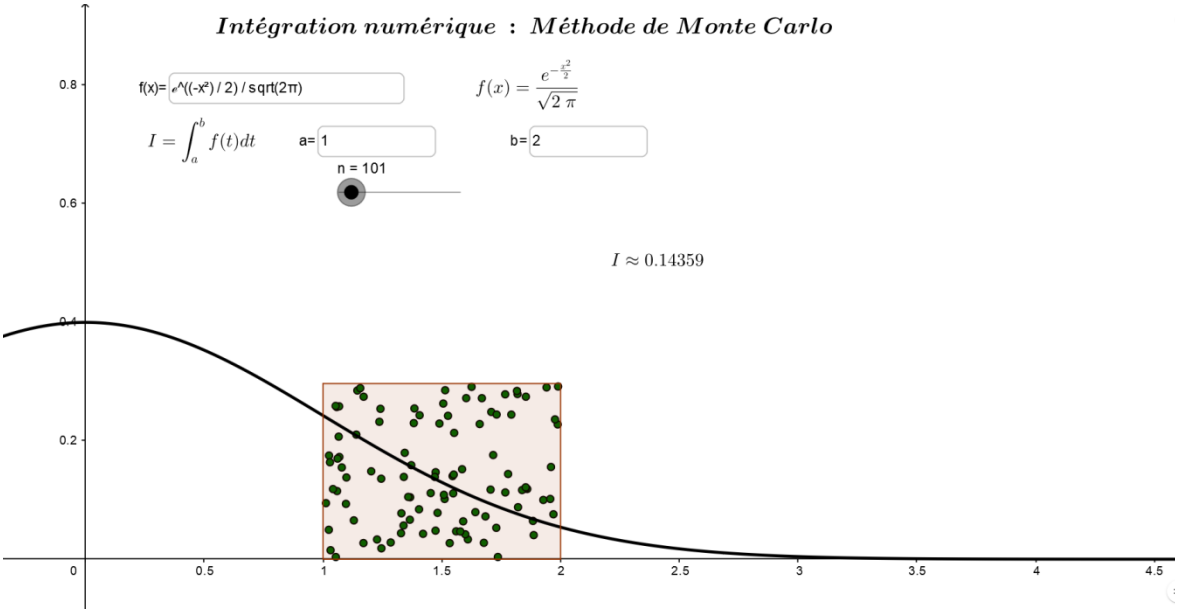
On établit ensuite le rapport $\frac{aire\ du\ lac}{aire\ du\ terrain} = \frac{k}{N}$

ce qui nous permet d'obtenir une estimation de l'aire du lac : $aire\ du\ lac = \frac{k}{N} * aire\ du\ terrain$

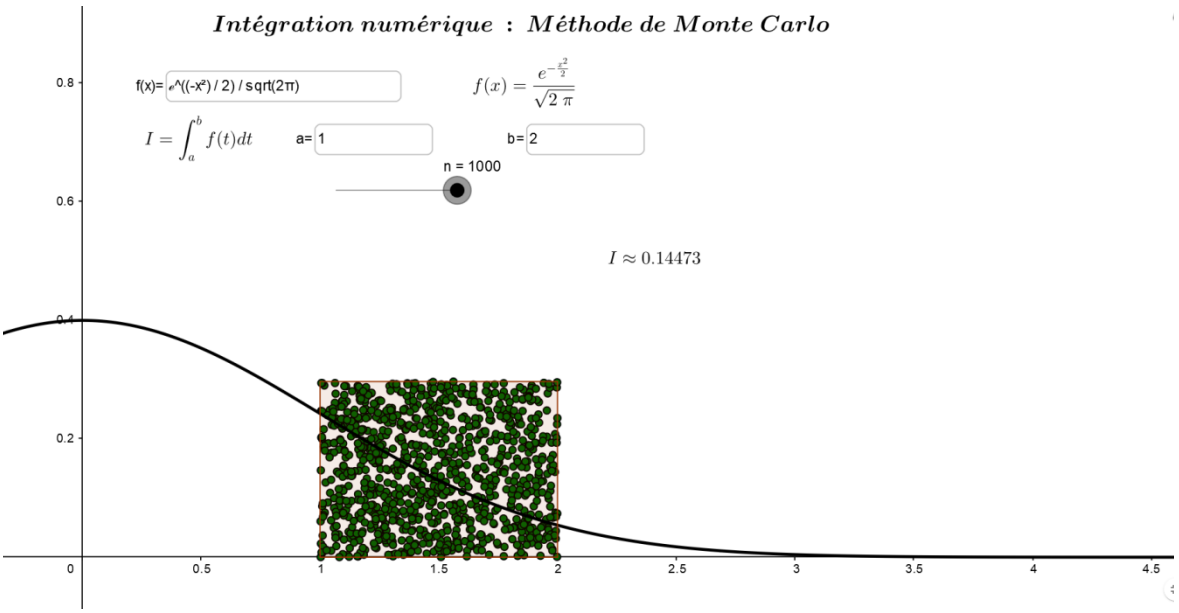


On peut généraliser cet exemple à l'étude de fonction (Roberger).

Soit une fonction f définie sur un intervalle [a ;b], a et b étant des nombres réels et a < b. On cherche à estimer la valeur de l'intégrale de f sur l'intervalle [a ;b].
A l'aide du générateur de hasard, on génère N points dans un rectangle d'aire A connue. On compte ensuite le nombre k de points $M(x\,,y)$ vérifiant $y < f(x)$.
Une estimation de l'intégrale est donc : $I = \frac{k}{N} * A$



Ici encore, on montre que plus on génère de nombres aléatoires, plus on se rapproche de la valeur exacte.



C) Expérience de l'aiguille de Buffon pour approximer le nombre pi

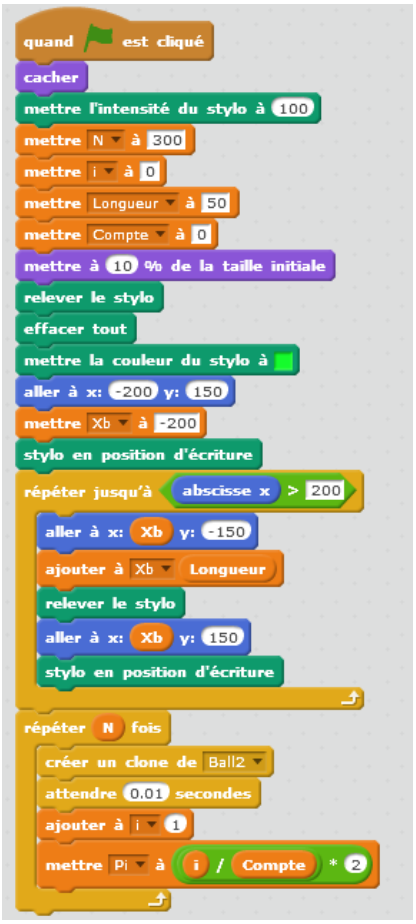
Description de l'expérience :

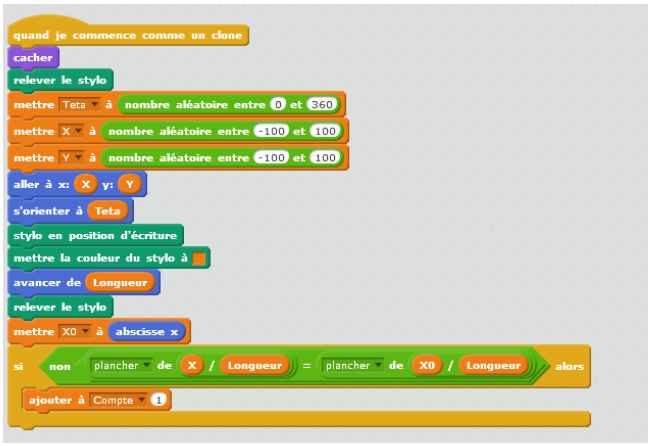
En 1777, le compte de Buffon proposa l'expérience suivante : Jeter, sur un parquet constitué de lattes de largeur L, un grand nombre d'aiguilles de longueur ℓ, et noter la fréquence d'aiguilles tombant à cheval sur deux lattes de parquet. La résolution de ce problème faisant intervenir le nombre π, l'intérêt de cette expérience est donc d'approcher une valeur expérimentale de π en la répétant un grand nombre de fois.

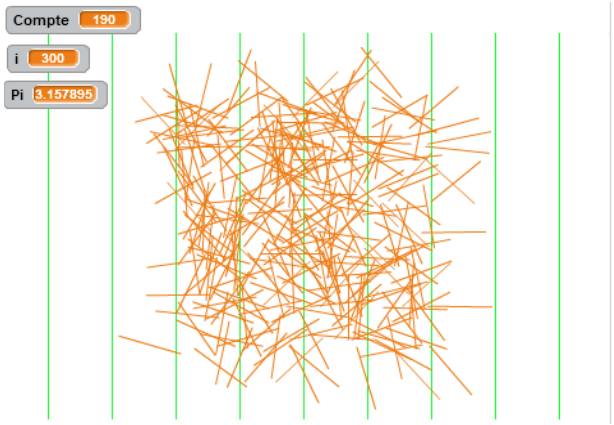
L'expérience montre que la proportion d'aiguille à cheval sur deux lattes vaut$\frac{2}{\pi}$, soit environ 0.63662.

Approche expérimentale :

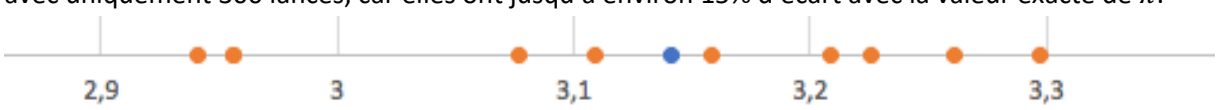
Mise en place du test des aiguilles de Buffon sous scratch 2







Cette approche expérimentale nous permet de nous approcher du nombre π, mais lors de la répétition du programme 10 fois, on s'aperçoit que les valeurs approchées de π ne sont pas précises avec uniquement 300 lancés, car elles ont jusqu'à environ 15% d'écart avec la valeur exacte de π.



Ce programme sous scratch est un exercice que l'on peut proposer à des élèves peu familiers avec la programmation. Pour augmenter le nombre de lancés, il faut utiliser un programme en python.

Preuve à l'aide d'une intégrale :

Cas où $\ell \leq L$

Lorsque l'on impose la longueur de l'aiguille inférieure à la largeur des lattes, $\ell \leq L$, il apparait évident qu'une aiguille ne peut avoir deux intersections avec les lignes du parquet (on considère comme nulle les probabilités des évènements « l'angle formé avec les lattes du parquet est un angle droit » et « l'angle formé avec les latte du parquet est un angle plat »).
Considérons un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ de norme L.
Les séparations entre les lattes du parquet forment des droites parallèles dont l'espacement vaut L. Le nombre de ces droites est considéré comme infini à gauche et à droite et on appelle L_i, la droite d'équation $X = L * i, \forall\, i \in Z, L \in \mathbb{R}$.
Les aiguilles forment des segments de longueur ℓ et sont au nombre de k ($k \in N^*$). On appelle ℓ_j la j[ième] aiguille.
On note $P(\ell_j)$la probabilité d'avoir au moins une intersection entre ℓ_j et les droites L_i

Intervalles de définition des variables.
Le positionnement de l'aiguille peut être défini par 3 paramètres :

- Les paramètres X_j et Y_j définissant la position du milieu de $\ell_j$sur le parquet.
- Le paramètre $\theta_j$réel appartenant à $[0\ ;\ 2\pi[$; définissant l'inclinaison de $\ell_j$tel que $\theta_j = 0$ correspondent à ℓ_j et L_i perpendiculaires.

Simplification 1 :
Le paramètre Y ne rentre pas en compte dans la probabilité d'obtenir$\ell_j$et L_i sécantes. En effet, il est considéré que les lattes sont de longueurs infinies au regard du lancé d'aiguilles fait. De ce fait, on peut considérer un axe de symétrie dirigé par $\vec{\imath}$, pour tout Y_j.

$$P(\ell_j \mid Y_j = y_a) = P(\ell_j \mid Y_j = y_b)\ \forall\, y_a, y_b \in \mathbb{R}$$

La superposition des aiguilles avec deux lattes de parquet ne repose donc que sur deux paramètres ; le positionnement sur l'axe $\overrightarrow{Oi}$et l'orientation de l'aiguille.

Simplification 2 :
Les espacements entre les droites L_i étant constants :

$$P(\ell_j \mid X_j = x) = P(\ell_j \mid X_j = x + (k * L))$$

Donc l'étude de la variable X_j peut être réduite à l'intervalle $[-L/2\ ; L/2[$
Dans cet intervalle on a également : $P(\ell_j \mid X_j = x) = P(l_j \mid X_j = -x)$
Donc l'étude de la variable X_j peut être réduite à l'intervalle $[0\ ; L/2[$. $X_j$est donc la plus courte distance entre le milieu du segment ℓ_j et la droite L_i la plus proche.

Simplification 3 :
Les segments ℓ_i sont repérés par leur milieu. Ainsi :

$$P(\ell_j \mid \theta_j = \alpha) = P(\ell_j \mid \theta_j = \alpha + \pi)$$

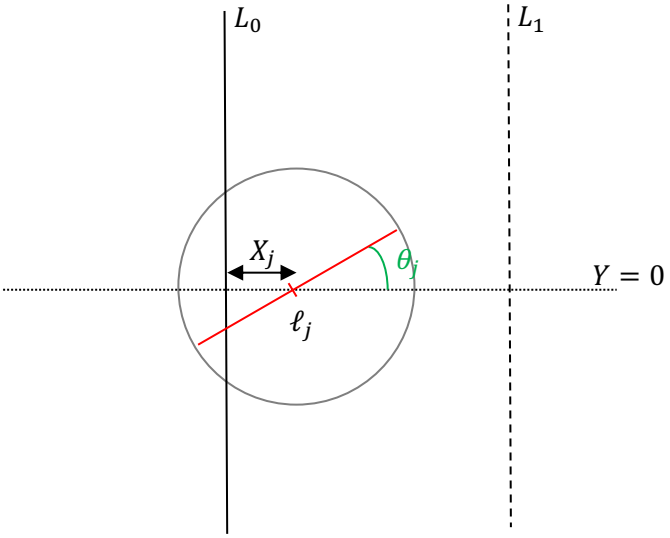
Par conséquent l'intervalle de définition de la variable θ_j peut être réduit à l'intervalle $[-\frac{\pi}{2}\ ; \frac{\pi}{2}[$.

De même, pour les raisons de symétries invoquées précédemment dirigées par l'axe X :

$$P(\ell_j \mid \theta_j = \alpha) = P(\ell_j \mid \theta_j = -\alpha)$$

Par conséquent l'intervalle de définition de la variable θ_j peut être réduit à l'intervalle $[0\,;\frac{\pi}{2}[$.

Représentation :



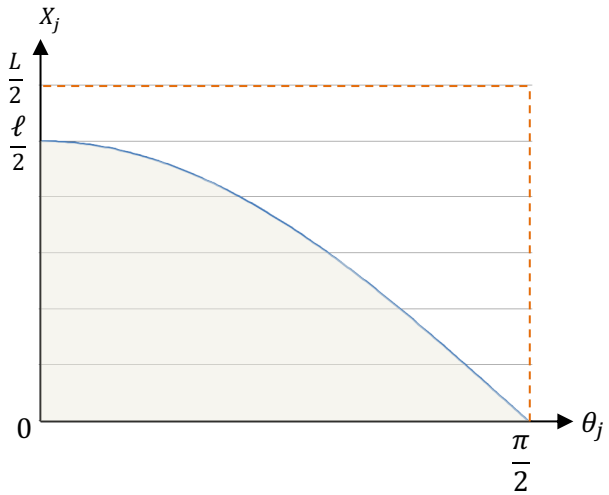
La répartition de θ_j est uniforme sur $[0\,;\frac{\pi}{2}[$. Or, les segments ℓ_j et L_0 sont sécants si :

$$X_j \leq \frac{\ell}{2} * \cos(\theta_j)$$

Sur la figure ci-dessous, le rectangle orange présente les couples de valeurs $(\theta_j; X_j)$ possibles.

La courbe présentée en bleue est une représentation de la fonction $f(x) = \frac{\ell}{2} * \cos(\theta_j)$

L'aire sous la courbe présente donc les couples de valeurs $(\theta_j; X_j)$ pour lesquels $X_j \leq \frac{\ell}{2} * \cos(\theta_j)$ et donc pour lesquels on obtient ℓ_j et L_0 sécants.



Par conséquent, la probabilité d'obtenir une intersection de ℓ_j et L_0est donnée par le rapport de l'aire sous la courbe et de l'aire du rectangle orange.

$$P(\ell_j) = \frac{Aire\ sous\ la\ courbe}{Aire\ du\ rectangle}$$

Aire sous la courbe est donnée par l'intégrale sur $[0\,;\frac{\pi}{2}[$ de $\frac{\ell}{2} * \cos(\theta_j)$, et l'aire du rectangle vaut $\frac{L}{2} * \frac{\pi}{2}$ d'où :

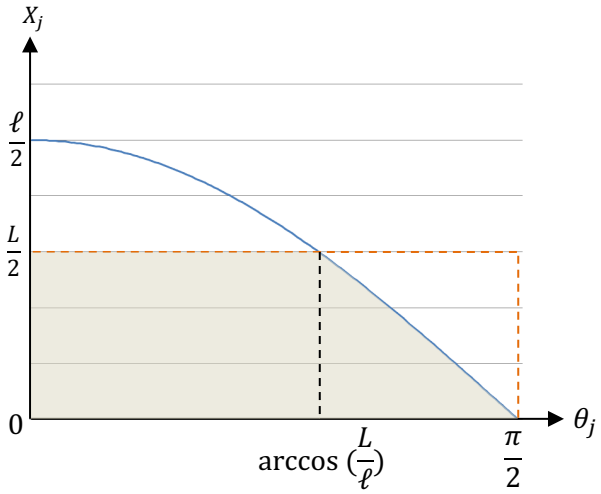
$$P\left(\ell_j\right) = \frac{4}{\pi L} * \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\ell}{2} * \cos(\theta_j)\, d\theta_j$$
$$= \frac{4}{\pi L} * \left[\frac{\ell}{2} * \sin(\theta_j)\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$
$$= \frac{4}{\pi L} * \frac{\ell}{2}$$
$$P\left(\ell_j\right) = \frac{2}{\pi} * \frac{\ell}{L}$$

Ce résultat signifie que l'on peut approcher une valeur de π par l'expérience si on laisse tomber un nombre d'aiguilles suffisamment grand en s'intéressant aux intersections des aiguilles avec les lignes d'un parquet.

<u>Cas où $\ell > L$:</u>

Dans le cas où $\ell > L$, il faut scinder l'intégrale en 2 parties. En effet :

- Si $\ell * \cos(\theta) \geq L$, alors $P\left(\ell_j \geq 1\right) = 1$, c'est-à-dire si $0 \leq \theta \leq \arccos\left(\frac{L}{\ell}\right)$.
- Si $\ell * \cos(\theta) < L$, alors $P\left(\ell_j\right)$ est calculée de façon analogue au cas où $\ell \leq L$



On obtient alors :

$$P\left(\ell_j\right) = \frac{4}{\pi L} * \left(\frac{L}{2} * \arccos\left(\frac{L}{\ell}\right) + \int_{\arccos\left(\frac{L}{\ell}\right)}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\ell}{2} * \cos(\theta_j)\, d\theta_j\right)$$
$$P\left(\ell_j\right) = \frac{4}{\pi L} * \left(\frac{L}{2} * \arccos\left(\frac{L}{\ell}\right) + \left[\frac{\ell}{2} * \sin(\theta_j)\right]_{\arccos\left(\frac{L}{\ell}\right)}^{\frac{\pi}{2}}\right)$$
$$P\left(\ell_j\right) = \frac{2}{\pi} * \left(\arccos\left(\frac{L}{\ell}\right) + \frac{\ell}{L} * \left(1 - \sin\left(\arccos\left(\frac{L}{\ell}\right)\right)\right)\right)$$

La simple connaissance du rapport $\frac{\ell}{L}$ permet donc quelque soit la configuration de retrouver une estimation du nombre π.

Preuve de E. BARBIER (1860) :

En 1860, E. Barbier a proposé une résolution ne faisant pas intervenir la notion d'intégrale, que nous allons présenter ci-dessous.

Dans le cas où $\ell > L$, il est alors possible d'obtenir plusieurs intersections de ℓ_j avec les droites L_i. Ainsi, le nombre espéré d'intersection E est donné par :

$$E = \sum_{k=1}^{n} k * P\,(\ell_j = k)$$

Par conséquent la probabilité d'obtenir au moins une intersection comme il est inscrit dans la problématique du problème de Buffon est donnée par :

$$P\,(\ell_j) = \sum_{k=1}^{n} P\,(\ell_j = k)$$

Note : La probabilité qu'une des extrémités de ℓ_j soit positionnée sur une droite L_i est nulle. De même :

$$P\left(\left(\theta_j = \frac{\pi}{2}\right) \cap (X_j = k * i)\right) = 0$$

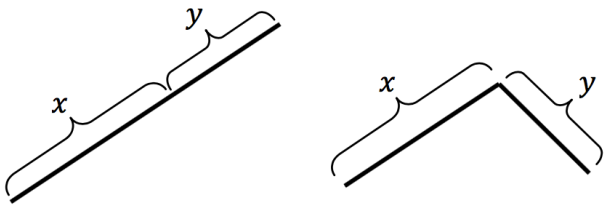
On remarque alors que dans le cas où $\ell \leq L$,$P\,(\ell_j > 1) = 0$ donc $E = P(\ell_j)$

Définissons $E(\ell)$ comme l'espérance du nombre d'intersection pour une aiguille droite de longueur ℓ.
$E(1)$ est alors l'espérance d'intersection d'une aiguille de longueur référence 1.

La linéarité de l'espérance donne :

$$E(a + b) = E(a) + E(b)$$

On peut appliquer cette relation à une aiguille que l'on aurait séparée en deux segments de longueurs quelconques (donc toujours inférieurs à L). Si l'on sépare notre aiguille en deux segments, puis que l'on tord notre aiguille à la frontière de ces segments, cette équation peut encore s'appliquer.



Donc pour une aiguille de longueur $n \in \mathbb{N}$:

$$E(n) = E(1 + 1 \ldots + 1) = E(1) + \ldots + E(1) = nE(1)$$

Et, pour tout $m \in \mathbb{N}$:

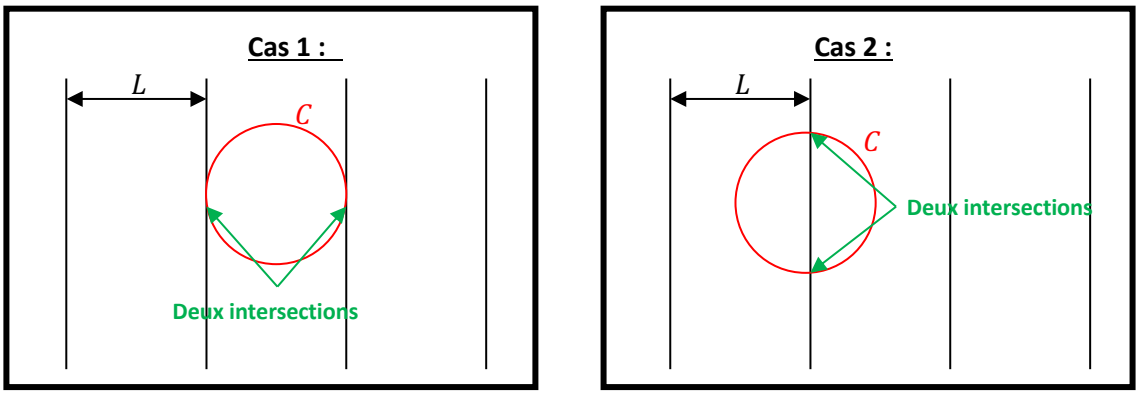
$$mE\left(\frac{n}{m}\right) = E\left(m\frac{n}{m}\right) = nE(1) = m * \frac{n}{m} * E(1)$$

$$E\left(\frac{n}{m}\right) = \frac{n}{m}E(1)$$

Donc on peut appliquer cette relation pour toute aiguille de longueur rationnelle.
Supposons une aiguille tordue en forme de polygone régulier de périmètre x (Où x est un nombre rationnel et $x = n * c$ où n est le nombre de côté du polygone et c la longueur d'un côté) alors :

$$E(x) = xE(1) = c * n * E(1)$$

En exploitant cette idée d'aiguille tordue dans le contexte définie par Georges Louis de Buffon, il est possible de définir deux aiguilles polygonales A_1 et A_2 tel que A_1 soit un polygone régulier inscrit dans un cercle C de diamètre L et A_2, un polygone régulier circonscrit au cercle C. On note que le périmètre du cercle vaut πL.
On peut facilement montrer que le nombre d'intersection d'un tel cercle avec les droites L_i est toujours égal à 2.



Ainsi, le nombre d'intersection de A_1 avec les droites L_i sera au maximum de 2 et le nombre d'intersection de A_2 avec les droites L_i sera au minimum de 2. D'où :

$$E(A_1) \leq E(C) \leq E(A_2)$$
$$E(A_1) \leq 2 \leq E(A_2)$$

Toutefois, A_1 et A_2 sont des polygones, donc le nombre d'intersection espéré est égal au produit du nombre de côtés constituant les polygones 'n' par la longueur d'un côté 'c_1' (Resp. c_2)

$$E(n * c_1) \leq 2 \leq E(n * c_2)$$
$$n * c_1 * E(1) \leq 2 \leq n * c_2 * E(1)$$

En faisant tendre le nombre de côté des polygones A_1 et A_2 vers l'infini, on obtient que les périmètres des polygones A_1 et A_2 tendent vers le périmètre du cercle C:

$$\lim_{n \to +\infty} c_1 * n = \pi L = \lim_{n \to +\infty} c_2 * n$$

Et donc, lorsque n tend vers l'infini, on en déduit que :

$$\pi L\, E(1) \leq 2 \leq \pi L * E(1)$$

Donc $E(1) = \frac{2}{\pi L}$

Pour une aiguille de longueur ℓ, on retrouve bien l'expression de la probabilité précédente

$$E(\ell) = \ell * E(1) = \frac{2\ell}{\pi L}$$

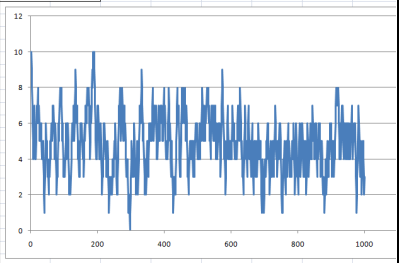
D) Modèle des urnes d'Ehrenfest et théorie des graphes

Le modèle des urnes d'Ehrenfest permet d'illustrer le paradoxe de la prédictibilité du hasard.

Principe : On considère deux urnes *A* et *B*, ainsi que N boules, numérotées de 1 à N. Initialement, toutes les boules se trouvent dans l'urne *A*. Le processus stochastique associé consiste à répéter l'opération suivante :
Tirer au hasard un numéro i compris entre 1 et N, puis, prendre la boule numéro i et la transférer dans l'urne où elle n'est pas.

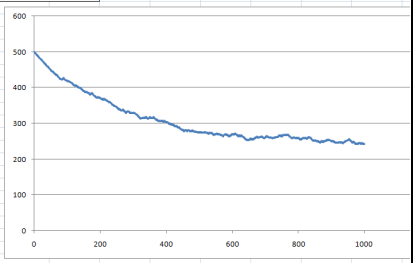
Evolution du nombre de boules dans l'urne A pour 1000 tirages dans le cas $N = 10$

Tirage	Urne A	Urne B	Numéro tiré	Nombre de Boules
1	10	0	8	10
2	9	1	5	
3	8	2	7	
4	7	3	3	
5	6	4	1	
6	5	5	4	
7	4	6	8	
8	5	5	8	
9	6	4	9	
10	7	3	6	
11	6	4	1	
12	5	5	4	
13	4	6	8	
14	5	5	3	
15	4	6	6	
16	5	5	10	
17	6	4	8	
18	7	3	7	
19	6	4	10	
20	7	3	9	
21	8	2	8	
22	7	3	5	
23	6	4	9	



Evolution du nombre de boules dans l'urne A pour 1000 tirages dans le cas $N = 500$

Tirage	Urne A	Urne B	Numéro tiré	Nombre de Boules
1	500	0	180	500
2	499	1	234	
3	498	2	393	
4	497	3	242	
5	496	4	67	
6	495	5	164	
7	494	6	145	
8	493	7	198	
9	492	8	150	
10	491	9	169	
11	490	10	68	
12	489	11	321	
13	488	12	457	
14	487	13	392	
15	486	14	317	
16	485	15	59	
17	484	16	14	
18	483	17	266	
19	482	18	93	
20	481	19	343	
21	480	20	76	
22	479	21	266	



Pour un nombre de boules et un nombre de tirages suffisamment grands, il est possible de prédire une répartition quasi-équivalente des boules dans les urnes A et B à la fin du processus.

IV. Bibliographie

- Aigner M. & Ziegler G.-M. Raisonnements divins : Quelques démonstrations mathématiques particulièrement élégantes
- Ameisen J.-C. (2011), Club Science Public France culture émission du 16/09/2011.
- Blaye P.-L. & Billet B. (2010) Nombres pseudo-aléatoires (en ligne) http://benjaminbillet.fr/media/prng_mathreport.pdf
- Borderie X. (2006) Comment simuler informatiquement le hasard ? (en ligne) http://www.journaldunet.com/developpeur/tutoriel/theo/060324-generer-le-hasard.shtml
- Chaput B. & Vergne C. (2010) A propos de l'introduction aux probabilités en troisième (en ligne) http://www.univ-irem.fr/IMG/pdf/A_propos_de_l_introduction_aux_probabilites-2.pdf
- France. Ministère de l'Education nationale, de l'enseignement supérieur et de la recherche (2015). Programmes d'enseignement cycle des approfondissements (cycle 4). Bulletin officiel de l'Education nationale, de l'enseignement supérieur et de la recherche, 26 novembre 2015. (en ligne) https://www.education.gouv.fr/pid285/bulletin_officiel.html?cid_bo=94717
- Ikonicoff R. (2015). Comment produire le hasard (en ligne) https://www.science-et-vie.com/questions-reponses/peut-on-vraiment-produire-des-nombres-au-hasard-6025
- Lainé C. Méthode de Monté-Carlo (en ligne) http://claine.fr/fichiers/ts/ap/monte_carlo_ts_ap.pdf
- Martin, T. (2016), « Cournot », version académique, dans M. Kristanek (dir.), l'Encyclopédie philosophique, (en ligne) http://encyclo-philo.fr/cournot-a/
- Mazliak L. (2012) Poincaré et le hasard. (en ligne) http://www.bourbaphy.fr/mazliakfr.pdf
- Neron J. (2011) Perception du hasard par les élèves (en ligne) http://www.ac-grenoble.fr/maths/?q=fr/recherche&faire=voir&ChoixNumero=2
- Roberger M. & Dolivet J. Calcul approché d'une intégrale par la Méthode de Monte Carlos sous Géogébra (en ligne) https://www.geogebra.org/m/M95c5vVp
- Article du site Developpez.net (en ligne) https://yahiko.developpez.com/tutoriels/generateur-nombre-aleatoire/#L6