Mise à niveau: déduction

Lionel Vaux Auclair

I2M, université d'Aix-Marseille

M2 IMD

Teaser

Théorème (Complétude)

Une formule A est un théorème de la théorie T si et seulement si A est démontrable à partir des axiomes de T.

Théorème (Incomplétude)

Il n'y a pas de théorie :

- *contenant suffisamment d'arithmétique,*
- *complète,*
- *cohérente,*
- *récursivement énumérable.*

On ne va pas démontrer ces résultats
mais donner suffisamment de notions pour les comprendre.

Teaser

Théorème (Complétude)

Une formule A est un théorème de la théorie T si et seulement si A est démontrable à partir des axiomes de T.

Théorème (Incomplétude)

Il n'y a pas de théorie :

- *contenant suffisamment d'arithmétique,*
- *complète,*
- *cohérente,*
- *récursivement énumérable.*

Regardons d'abord le cas propositionnel.

Démonstrations à la Hilbert

Il y a bien longtemps. . .

Une démonstration, c'est *une suite finie de formules dont chacune est soit un axiome, soit une conséquence immédiate des formules précédentes en vertu d'une règle d'inférence.*

Démonstrations à la Hilbert

Il y a bien longtemps...

Une démonstration, c'est *une suite finie de formules dont chacune est soit un axiome, soit une conséquence immédiate des formules précédentes en vertu d'une règle d'inférence.*

Mais on perd toute la structure.

Un exemple

Théorème 6.24 (L'égalité de Bézout) *Soit* $(m, n) \in \mathbb{Z}^* \times \mathbb{Z}^*$. *Alors il existe un couple* $(u, v) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ *tel que*

$$\mathrm{pgcd}(m, n) = um + vn.$$

En utilisant la notation $m\mathbb{Z} + n\mathbb{Z} := \{um + vn \mid (u, v) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}\}$, le théorème 6.24 s'écrit :

$$\mathrm{pgcd}(m, n) \in m\mathbb{Z} + n\mathbb{Z}.$$

Démonstration: Posons

$$\mathcal{E} := \{k \in \mathbb{N}^* \mid \exists (u, v) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \text{ telle que } k = um + vn\} = (m\mathbb{Z} + n\mathbb{Z}) \cap \mathbb{N}^* .$$

Remarquer que $\mathcal{E}$ est un sous-ensemble non-vide de $\mathbb{N}^*$ (pourquoi ?). D'après le théorème 5.7 il en résulte que le minimum $\delta := \min(\mathcal{E})$ existe. Puisque $\delta \in \mathcal{E}$ on a

$$\delta = u_\delta m + v_\delta n$$

avec $(u_\delta, v_\delta) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$. Nous allons montrer que $\delta = \mathrm{pgcd}(m, n)$. Il suffit de démontrer que

(a) δ est un diviseur commun de m et n.

(b) Tout diviseur commun de m et n est un diviseur de δ.

Pour démontrer (a) appliquons le théorème de division euclidienne (théorème 3.5) aux couples (δ, m) et (δ, n). On obtient

$$m = q\delta + r, \;\; n = q'\delta + r' ,$$

où $(q, q') \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, $0 \le r < \delta$, $0 \le r' < \delta$. Nous allons montrer (par l'absurde) que $r = r' = 0$. En effet, supposons par exemple $r > 0$. Alors

$$\mathbb{N}^* \ni r = m - q\delta = m - q(u_\delta m + v_\delta n) = (1 - qu_\delta)m + (-qv_\delta)n ,$$

qui, évidemment, est un élément de $\mathcal{E}$. Mais on a $r < \delta$, ce qui contredit la définition de δ (le minimum de l'ensemble $\mathcal{E}$). Il en résulte $r = 0$. Un argument similaire donne $r' = 0$. Donc $r = r' = 0$, ce qui implique évidemment $\delta | m$ et $\delta | n$.

Pour démontrer (b) soit $d \in \mathbb{Z}^*$ diviseur commun de m et n. Alors $d | u_\delta m$ et $d | v_\delta n$, donc $d | (u_\delta m + v_\delta n) = \delta$.

$\blacksquare$

La déduction

On démontre une formule A dans un certain contexte $\Gamma = A_1, \ldots, A_n$ rassemblant les hypothèses faites jusque là.
On note $\Gamma \vdash A$ l'énoncé : *en supposant* $A_1, \ldots, A_n$, *on déduit* A. On appelle ça un séquent.

Définition

Une règle de déduction (R) est la donnée d'une suite finie de séquents hypothèses $\Gamma_1 \vdash A_1$, ..., $\Gamma_n \vdash A_n$ et d'un séquent de conclusion $\Gamma \vdash A$. On note :

$$\frac{\Gamma_1 \vdash A_1 \qquad \cdots \qquad \Gamma_n \vdash A_n}{\Gamma \vdash A}\ (R)$$

Une instance de (R) est obtenue en substituant des formules aux variables propositionnelles de (R).

Comment lire une règle ?

$$\frac{\Gamma_1 \vdash A_1 \qquad \cdots \qquad \Gamma_n \vdash A_n}{\Gamma \vdash A} \ (R)$$

De haut en bas : « rédaction. »

si on a établi les hypothèses, on en déduit la conclusion

De bas en haut : « recherche. »

pour prouver la conclusion, il suffit d'établir les hypothèses

Par exemple :

$$\frac{A \vdash B}{\vdash A \Rightarrow B} \ \text{(implication)} \qquad \frac{\Gamma \vdash B}{\Gamma, A \vdash B} \ \text{(hyp. inutile)} \qquad \frac{\Gamma, A \vdash B \qquad \Gamma, \neg A \vdash B}{\Gamma \vdash B} \ \text{(vrai/faux)} \qquad \cdots$$

Mais aussi :

$$\frac{A, B \vdash A}{B \vdash A} \ \text{(méthode de L1)}$$

Arbres de démonstration

Un système logique $\mathcal{L}$ est un ensemble fini (ou au moins récursif) de règles.

Un argument (ou une démonstration ouverte) dans $\mathcal{L}$ est un arbre dont les nœuds sont des séquents, muni d'un étiquetage partiel des nœuds par des règles (valides) de sorte que :

- si un nœud n'est pas étiqueté alors c'est une feuille (c'est une prémisse de l'argument) ;
- pour chaque nœud étiqueté par la règle (R), il y a une instance de (R) dont ce nœud est la conclusion, et ses fils sont les hypothèses.

Une démonstration est un argument sans prémisse.

On dit que $\Gamma \vdash A$ est dérivable (ou démontrable) dans $\mathcal{L}$ s'il existe une démonstration dont la racine est de conclusion $\Gamma \vdash A$.
On écrit alors $\Gamma \vdash_{\mathcal{L}} A$.

Déduction naturelle : règles d'introduction

Comment prouve-t-on une conjonction ? une disjonction ? une implication ?

$$\frac{\Gamma \vdash A \qquad \Gamma \vdash B}{\Gamma \vdash A \wedge B}\ (\wedge_i)$$

$$\frac{\Gamma \vdash A}{\Gamma \vdash A \vee B}\ (\vee_{ig}) \qquad \frac{\Gamma \vdash B}{\Gamma \vdash A \vee B}\ (\vee_{id})$$

$$\frac{\Gamma, A \vdash B}{\Gamma \vdash A \Rightarrow B}\ (\Rightarrow_i)$$

Déduction naturelle : règles d'introduction

Comment prouve-t-on une conjonction ? une disjonction ? une implication ?

$$\frac{\Gamma \vdash A \qquad \Gamma \vdash B}{\Gamma \vdash A \wedge B}\ (\wedge_i)$$

$$\frac{\Gamma \vdash A}{\Gamma \vdash A \vee B}\ (\vee_{ig}) \qquad \frac{\Gamma \vdash B}{\Gamma \vdash A \vee B}\ (\vee_{id})$$

$$\frac{\Gamma, A \vdash B}{\Gamma \vdash A \Rightarrow B}\ (\Rightarrow_i)$$

$$\frac{}{\Gamma \vdash \top}\ (\top_i)$$

Un premier exemple

$$\vdash A \Rightarrow B \Rightarrow A \wedge B$$

Un premier exemple

$$\dfrac{A \vdash B \Rightarrow A \wedge B}{\vdash A \Rightarrow B \Rightarrow A \wedge B}\ (\Rightarrow_i)$$

Un premier exemple

$$\dfrac{\dfrac{A, B \vdash A \wedge B}{A \vdash B \Rightarrow A \wedge B}\ (\Rightarrow_i)}{\vdash A \Rightarrow B \Rightarrow A \wedge B}\ (\Rightarrow_i)$$

Un premier exemple

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{A, B \vdash A \qquad\qquad A, B \vdash B}{A, B \vdash A \wedge B}\ (\wedge_i)}{A \vdash B \Rightarrow A \wedge B}\ (\Rightarrow_i)}{\vdash A \Rightarrow B \Rightarrow A \wedge B}\ (\Rightarrow_i)$$

Déduction naturelle : l'axiome

On peut s'arrêter dès que la conclusion fait partie des hypothèses.

$$\frac{}{\Gamma, A \vdash A}\ (ax)$$

Un premier exemple

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{A, B \vdash A}\,(ax) \qquad \dfrac{}{A, B \vdash B}\,(ax)}{A, B \vdash A \wedge B}\,(\wedge_i)}{A \vdash B \Rightarrow A \wedge B}\,(\Rightarrow_i)}{\vdash A \Rightarrow B \Rightarrow A \wedge B}\,(\Rightarrow_i)$$

Un peu plus compliqué

$$\frac{A \wedge (B \vee C) \vdash (A \wedge B) \vee (A \wedge C)}{\vdash A \wedge (B \vee C) \Rightarrow (A \wedge B) \vee (A \wedge C)}\ (\Rightarrow_i)$$

Déduction naturelle : règles d'élimination

Comment utilise-t-on une conjonction ? une disjonction ? une implication ?

$$\frac{\Gamma \vdash A \wedge B}{\Gamma \vdash A}\ (\wedge_{eg}) \qquad \frac{\Gamma \vdash A \wedge B}{\Gamma \vdash B}\ (\wedge_{ed})$$

$$\frac{\Gamma \vdash A \vee B \qquad \Gamma, A \vdash C \qquad \Gamma, B \vdash C}{\Gamma \vdash C}\ (\vee_e)$$

$$\frac{\Gamma \vdash A \Rightarrow B \qquad \Gamma \vdash A}{\Gamma \vdash B}\ (\Rightarrow_e)$$

Déduction naturelle : règles d'élimination

Comment utilise-t-on une conjonction ? une disjonction ? une implication ?

$$\frac{\Gamma \vdash A \wedge B}{\Gamma \vdash A}\ (\wedge_{eg}) \qquad \frac{\Gamma \vdash A \wedge B}{\Gamma \vdash B}\ (\wedge_{ed})$$

$$\frac{\Gamma \vdash A \vee B \qquad \Gamma, A \vdash C \qquad \Gamma, B \vdash C}{\Gamma \vdash C}\ (\vee_e)$$

$$\frac{\Gamma \vdash A \Rightarrow B \qquad \Gamma \vdash A}{\Gamma \vdash B}\ (\Rightarrow_e)$$

$$\frac{\Gamma \vdash \bot}{\Gamma \vdash A}\ (\bot_e)$$

Un peu plus compliqué

$$
\dfrac{\dfrac{
\dfrac{\dfrac{}{F \vdash F}\,(ax)}{F \vdash B \vee C}\,(\wedge_{ed})
\qquad
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{F, B \vdash F}\,(ax)}{F, B \vdash A}\,(\wedge_{eg}) \quad \dfrac{}{F, B \vdash B}\,(ax)}{F, B \vdash A \wedge B}\,(\wedge_i)}{F, B \vdash (A \wedge B) \vee (A \wedge C)}\,(\vee_{ig})
\qquad
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{F, C \vdash F}\,(ax)}{F, C \vdash A}\,(\wedge_{eg}) \quad \dfrac{}{F, C \vdash C}\,(ax)}{F, C \vdash A \wedge C}\,(\wedge_i)}{F, C \vdash (A \wedge B) \vee (A \wedge C)}\,(\vee_{id})
}{F := A \wedge (B \vee C) \vdash (A \wedge B) \vee (A \wedge C)}\,(\vee_e)}{\vdash A \wedge (B \vee C) \Rightarrow (A \wedge B) \vee (A \wedge C)}\,(\Rightarrow_i)
$$

Un peu plus compliqué

$$
\dfrac{
\dfrac{\dfrac{}{F \vdash F}\,(ax)}{F \vdash B \vee C}\,(\wedge_{ed})
\qquad
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{F, B \vdash F}\,(ax)}{F, B \vdash A}\,(\wedge_{eg}) \qquad \dfrac{}{F, B \vdash B}\,(ax)}{F, B \vdash A \wedge B}\,(\wedge_i)}{F, B \vdash (A \wedge B) \vee (A \wedge C)}\,(\vee_{ig})
\qquad
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{F, C \vdash F}\,(ax)}{F, C \vdash A}\,(\wedge_{eg}) \qquad \dfrac{}{F, C \vdash C}\,(ax)}{F, C \vdash A \wedge C}\,(\wedge_i)}{F, C \vdash (A \wedge B) \vee (A \wedge C)}\,(\vee_{id})
}{
\dfrac{F := A \wedge (B \vee C) \vdash (A \wedge B) \vee (A \wedge C)}{\vdash A \wedge (B \vee C) \Rightarrow (A \wedge B) \vee (A \wedge C)}\,(\Rightarrow_i)
}\,(\vee_e)
$$

$\rightsquigarrow$ S'exercer : questions 1 à 5 de l'exercice 1

Avec la négation

$$\dfrac{\dfrac{\neg(A \vee B) \vdash \neg A \qquad \neg(A \vee B) \vdash \neg B}{\neg(A \vee B) \vdash \neg A \wedge \neg B}\ (\wedge_i)}{\vdash \neg(A \vee B) \Rightarrow \neg A \wedge \neg B}\ (\Rightarrow_i)$$

Déduction naturelle : la négation

$$\frac{\Gamma, A \vdash \bot}{\Gamma \vdash \neg A}\ (\neg_i) \qquad \frac{\Gamma \vdash \neg A \qquad \Gamma \vdash A}{\Gamma \vdash \bot}\ (\neg_e)$$

Avec la négation

$$
\begin{prooftree}
\AxiomC{}
\RightLabel{(ax)}
\UnaryInfC{$\neg(A \vee B), A \vdash \neg(A \vee B)$}
\AxiomC{}
\RightLabel{(ax)}
\UnaryInfC{$\neg(A \vee B), A \vdash A$}
\RightLabel{$(\vee_{ig})$}
\UnaryInfC{$\neg(A \vee B), A \vdash A \vee B$}
\RightLabel{$(\neg_e)$}
\BinaryInfC{$\neg(A \vee B), A \vdash \bot$}
\RightLabel{$(\neg_i)$}
\UnaryInfC{$\neg(A \vee B) \vdash \neg A$}
\AxiomC{$\vdots$}
\RightLabel{$(\neg_i)$}
\UnaryInfC{$\neg(A \vee B) \vdash \neg B$}
\RightLabel{$(\wedge_i)$}
\BinaryInfC{$\neg(A \vee B) \vdash \neg A \wedge \neg B$}
\RightLabel{$(\Rightarrow_i)$}
\UnaryInfC{$\vdash \neg(A \vee B) \Rightarrow \neg A \wedge \neg B$}
\end{prooftree}
$$

Déduction naturelle : la négation

$$\frac{\Gamma, A \vdash \bot}{\Gamma \vdash \neg A}\ (\neg_i) \qquad \frac{\Gamma \vdash \neg A \qquad \Gamma \vdash A}{\Gamma \vdash \bot}\ (\neg_e)$$

Négation et contradiction :

$$\neg A \iff A \Rightarrow \bot$$

$$\frac{\Gamma, A \vdash \bot}{\Gamma \vdash A \Rightarrow \bot}\ (\Rightarrow_i) \qquad \frac{\Gamma \vdash A \Rightarrow \bot \qquad \Gamma \vdash A}{\Gamma \vdash \bot}\ (\Rightarrow_e)$$

Toujours la négation

$$\dfrac{\neg(A \wedge B) \vdash \neg A \vee \neg B}{\vdash \neg(A \wedge B) \Rightarrow \neg A \vee \neg B}\ (\Rightarrow_i)$$

Toujours la négation

$$\dfrac{\dfrac{\neg(A \wedge B) \vdash \neg A}{\neg(A \wedge B) \vdash \neg A \vee \neg B}\ (\vee_{ig})}{\vdash \neg(A \wedge B) \Rightarrow \neg A \vee \neg B}\ (\Rightarrow_i)$$

Déduction naturelle : raisonner sur la vérité

Tiers exclu :

$$\frac{\Gamma, A \vdash B \qquad \Gamma, \neg A \vdash B}{\Gamma \vdash B}\ (t.e.)$$

Toujours la négation

$$
\dfrac{\dfrac{H, \neg A \vdash \neg A \vee \neg B \qquad\qquad H, A \vdash \neg A \vee \neg B}{H := \neg(A \wedge B) \vdash \neg A \vee \neg B}\ (t.e.)}{\vdash \neg(A \wedge B) \Rightarrow \neg A \vee \neg B}\ (\Rightarrow_i)
$$

Toujours la négation

$$
\dfrac{
\dfrac{\dfrac{}{H, \neg A \vdash \neg A}\,(ax)}{H, \neg A \vdash \neg A \vee \neg B}\,(\vee_{ig})
\qquad
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{H, A, B \vdash A}\,(ax) \quad \dfrac{}{H, A, B \vdash B}\,(ax)}{H, A, B \vdash A \wedge B}\,(\wedge_i) \quad \dfrac{}{H, A, B \vdash \neg(A \wedge B)}\,(ax)}{H, A, B \vdash \bot}\,(\neg_e)}{H, A \vdash \neg B}\,(\neg_i)}{H, A \vdash \neg A \vee \neg B}\,(\vee_{id})
}{
\dfrac{H := \neg(A \wedge B) \vdash \neg A \vee \neg B}{\vdash \neg(A \wedge B) \Rightarrow \neg A \vee \neg B}\,(\Rightarrow_i)
}\,(t.e.)
$$

Toujours la négation

$$
\dfrac{
\dfrac{
\dfrac{}{H, \neg A \vdash \neg A}\,(ax)
}{H, \neg A \vdash \neg A \vee \neg B}\,(\vee_{ig})
\qquad
\dfrac{
\dfrac{
\dfrac{
\dfrac{
\dfrac{}{H, A, B \vdash A}\,(ax)
\quad
\dfrac{}{H, A, B \vdash B}\,(ax)
}{H, A, B \vdash A \wedge B}\,(\wedge_i)
\quad
\dfrac{}{H, A, B \vdash \neg(A \wedge B)}\,(ax)
}{H, A, B \vdash \bot}\,(\neg_e)
}{H, A \vdash \neg B}\,(\neg_i)
}{H, A \vdash \neg A \vee \neg B}\,(\vee_{id})
}{
\dfrac{H := \neg(A \wedge B) \vdash \neg A \vee \neg B}{\vdash \neg(A \wedge B) \Rightarrow \neg A \vee \neg B}\,(\Rightarrow_i)
}\,(t.e.)
$$

$\rightsquigarrow$ S'exercer : questions 6 à 8 de l'exercice 1, et exercice 2

Déduction naturelle : raisonner sur la vérité

Tiers exclu :

$$\frac{\Gamma, A \vdash B \qquad \Gamma, \neg A \vdash B}{\Gamma \vdash B}\ (t.e.)$$

D'autres manières de raisonner sur la vérité :

$$\frac{\Gamma, \neg A \vdash \bot}{\Gamma \vdash A}\ (r.a.) \qquad \frac{\Gamma \vdash \neg\neg A}{\Gamma \vdash A}\ (\neg\neg_e) \qquad \frac{\Gamma, \neg A \vdash A}{\Gamma \vdash A}\ (Peirce) \qquad \frac{\Gamma, \neg B \vdash \neg A}{\Gamma, A \vdash B}\ (contrap)$$

Toutes sont équivalentes : *cf.* exercice 4

Bureaucratie

Affaiblissement (on peut oublier une hypothèse) :

$$\frac{\Gamma \vdash B}{\Gamma, A \vdash B} \; (\mathit{aff})$$

Contraction (on peut utiliser une hypothèse plusieurs fois) :

$$\frac{\Gamma, A, A \vdash B}{\Gamma, A \vdash B} \; (\mathit{cont})$$

Échange (l'ordre des hypothèses ne compte pas) :

$$\frac{\Gamma, A, B, \Gamma' \vdash C}{\Gamma, B, A, \Gamma' \vdash C} \; (\mathit{ech})$$

Les deux premières sont dispensables, *cf.* exercice 6

Déduction naturelle : DN_0

$$\frac{}{\Gamma, A \vdash A}\ (ax)$$

$$\frac{\Gamma \vdash A \quad \Gamma \vdash B}{\Gamma \vdash A \wedge B}\ (\wedge_i) \qquad \frac{\Gamma \vdash A}{\Gamma \vdash A \vee B}\ (\vee_{ig}) \qquad \frac{\Gamma \vdash B}{\Gamma \vdash A \vee B}\ (\vee_{id})$$

$$\frac{\Gamma, A \vdash B}{\Gamma \vdash A \Rightarrow B}\ (\Rightarrow_i) \qquad \frac{\Gamma, A \vdash \bot}{\Gamma \vdash \neg A}\ (\neg_i) \qquad \frac{}{\Gamma \vdash \top}\ (\top_i)$$

$$\frac{\Gamma \vdash A \wedge B}{\Gamma \vdash A}\ (\wedge_{eg}) \qquad \frac{\Gamma \vdash A \wedge B}{\Gamma \vdash B}\ (\wedge_{ed}) \qquad \frac{\Gamma \vdash A \vee B \quad \Gamma, A \vdash C \quad \Gamma, B \vdash C}{\Gamma \vdash C}\ (\vee_e)$$

$$\frac{\Gamma \vdash A \Rightarrow B \quad \Gamma \vdash A}{\Gamma \vdash B}\ (\Rightarrow_e) \qquad \frac{\Gamma \vdash \neg A \quad \Gamma \vdash A}{\Gamma \vdash \bot}\ (\neg_e) \qquad \frac{\Gamma \vdash \bot}{\Gamma \vdash A}\ (\bot_e)$$

$$\frac{\Gamma, A \vdash B \quad \Gamma, \neg A \vdash B}{\Gamma \vdash B}\ (t.e.)$$

$$\frac{\Gamma \vdash B}{\Gamma, A \vdash B}\ (aff) \qquad \frac{\Gamma, A, A \vdash B}{\Gamma, A \vdash B}\ (cont) \qquad \frac{\Gamma, A, B, \Gamma' \vdash C}{\Gamma, B, A, \Gamma' \vdash C}\ (ech)$$

Correction d'une règle de déduction

$$\frac{\Gamma_1 \vdash A_1 \qquad \cdots \qquad \Gamma_n \vdash A_n}{\Gamma \vdash A}\ (R)$$

Un séquent $A_1, \ldots, A_n \vdash A$ est valide (on note $A_1, \ldots, A_n \models A$) si :
pour toute dvv d telle que $d(A_1) = \cdots = d(A_n) = 1$, on a $d(A) = 1$
(autrement dit si $A_1 \wedge \cdots \wedge A_n \Rightarrow A$ est une tautologie).

Définition

La règle (R) est valide (ou correcte) si $\Gamma \models A$ dès que $\Gamma_i \models A_i$ pour $i = 1, \ldots, n$
(autrement dit si la déduction préserve les tautologies).

Trois niveaux d'implication

- Dans les formules : $A \Rightarrow B$ (*si* A *alors* B) est une formule comme les autres.
- Dans les séquents : $\Gamma \vdash A$ représente un état courant dans une démonstration (A se déduit des hypothèses de Γ).
- Dans les règles :

$$\frac{\Gamma_1 \vdash A_1 \qquad \cdots \qquad \Gamma_n \vdash A_n}{\Gamma \vdash A}\ (R)$$

dit qu'on peut déduire la validité de $\Gamma \vdash A$ de celle des $\Gamma_i \vdash A_i$.

Trois niveaux d'implication

- Dans les formules : $A \Rightarrow B$ (*si A alors B*) est une formule comme les autres.
- Dans les séquents : $\Gamma \vdash A$ représente un état courant dans une démonstration (A se déduit des hypothèses de Γ).
- Dans les règles :

$$\frac{\Gamma_1 \vdash A_1 \qquad \cdots \qquad \Gamma_n \vdash A_n}{\Gamma \vdash A}\ (R)$$

dit qu'on peut déduire la validité de $\Gamma \vdash A$ de celle des $\Gamma_i \vdash A_i$.

$$\begin{array}{lll} A \Rightarrow B \text{ est une tautologie} & \text{ssi} & \text{le séquent } A \vdash B \text{ est valide} \\ & \text{ssi} & \text{la règle } \dfrac{\Gamma \vdash A}{\Gamma \vdash B} \text{ est correcte} \\ & \text{ssi} & \text{la règle } \dfrac{\Gamma, B \vdash C}{\Gamma, A \vdash C} \text{ est correcte} \end{array}$$

Correction

Soit $\mathcal{L}$ un système logique correct (c'est-à-dire que toutes les règles sont correctes).

Théorème

Si $\vdash_{\mathcal{L}} A$ est dérivable alors A est une tautologie.

Démonstration: On montre par induction sur un arbre de démonstration quelconque que son séquent conclusion est valide. Soit π un arbre de démonstration de conclusion $\Gamma \vdash A$, et

$$\frac{\Gamma_1 \vdash A_1 \qquad \cdots \qquad \Gamma_n \vdash A_n}{\Gamma \vdash A}\ (R)$$

la règle dont la racine de π est une instance. Par hypothèse d'induction appliquée aux sous-arbres de π, on obtient que chaque séquent $\Gamma_i \vdash A_i$ est valide. Comme (R) est correcte, on en déduit que $\Gamma \vdash A$ est valide. □

Correction

Soit $\mathcal{L}$ un système logique correct (c'est-à-dire que toutes les règles sont correctes).

Théorème

Si $\vdash_{\mathcal{L}} A$ est dérivable alors A est une tautologie.

Démonstration: On montre par induction sur un arbre de démonstration quelconque que son séquent conclusion est valide. Soit π un arbre de démonstration de conclusion $\Gamma \vdash A$, et

$$\frac{\Gamma_1 \vdash A_1 \qquad \cdots \qquad \Gamma_n \vdash A_n}{\Gamma \vdash A}\ (R)$$

la règle dont la racine de π est une instance. Par hypothèse d'induction appliquée aux sous-arbres de π, on obtient que chaque séquent $\Gamma_i \vdash A_i$ est valide. Comme (R) est correcte, on en déduit que $\Gamma \vdash A$ est valide. $\square$

Encore heureux !

Complétude : le cas propositionnel

Théorème

A est une tautologie ssi $\vdash A$ est dérivable dans DN_0.

Complétude : le cas propositionnel

Théorème

A est une tautologie ssi $\vdash A$ est dérivable dans DN_0.

Démonstration: On montre simultanément, par induction sur A :

- $d(A) = 1$ implique que $\Gamma_d \vdash A$ est dérivable ;
- $d(A) = 0$ implique que $\Gamma_d \vdash \neg A$ est dérivable ;

où, pour toute dvv d, Γ_d énonce les choix de vérité de d.
Puis on montre que si on se limite à une liste finie de variables propositionnelles, la formule $\bigvee_d \Gamma_d$ est dérivable, et on élimine cette disjonction dans le cas où A est une tautologie. $\square$

L'exercice 5 détaille les étapes de la preuve.

Règles dérivables, admissibles

- Une règle (R) est admissible dans $\mathcal{L}$, si $\mathcal{L}$ et $\mathcal{L} \cup \{R\}$ démontrent les mêmes séquents.
- La règle

$$\frac{\Gamma_1 \vdash A_1 \qquad \cdots \qquad \Gamma_n \vdash A_n}{\Gamma \vdash A}\ (R)$$

  est dérivable dans $\mathcal{L}$, s'il existe un argument dans $\mathcal{L}$ permettant de dériver $\Gamma \vdash A$, à partir de prémisses parmi $\Gamma_1 \vdash A_1, \ldots, \Gamma_n \vdash A_n$.

Une règle dérivable est évidemment admissible.

Exemple (la règle de coupure)

$$\frac{\Gamma \vdash A \qquad \Gamma, A \vdash B}{\Gamma \vdash B}\ (cut)$$ est dérivable dans DN_0 : $$\frac{\Gamma \vdash A \qquad \dfrac{\Gamma, A \vdash B}{\Gamma \vdash A \Rightarrow B}\ (\Rightarrow_i)}{\Gamma \vdash B}\ (\Rightarrow_e)$$

$\rightsquigarrow$ S'exercer : exercice 3

Beaucoup mais pas trop

Considérons $DN_0^{\Rightarrow}$ le système réduit aux règles (ax), $(\Rightarrow_i)$, $(\Rightarrow_e)$ et $(r.a.)$.

Théorème

Modulo la traduction usuelle des connecteurs, les règles de DN_0 sont admissibles dans $DN_0^{\Rightarrow}$.

En particulier, le théorème de complétude reste valide pour $DN_0^{\Rightarrow}$.

Beaucoup mais pas trop

Considérons $DN_0^{\Rightarrow}$ le système réduit aux règles (ax), $(\Rightarrow_i)$, $(\Rightarrow_e)$ et $(r.a.)$.

Théorème

Modulo la traduction usuelle des connecteurs, les règles de DN_0 sont admissibles dans $DN_0^{\Rightarrow}$.

En particulier, le théorème de complétude reste valide pour $DN_0^{\Rightarrow}$.

- Si on cherche à produire une démonstration, on a intérêt à avoir un *maximum* de règles (surtout si on veut une démonstration lisible).
  Mais on s'en tient à des règles valides.
- $\rightsquigarrow$ Correction

Beaucoup mais pas trop

Considérons $DN_0^{\Rightarrow}$ le système réduit aux règles (ax), $(\Rightarrow_i)$, $(\Rightarrow_e)$ et $(r.a.)$.

Théorème

Modulo la traduction usuelle des connecteurs, les règles de DN_0 sont admissibles dans $DN_0^{\Rightarrow}$.

En particulier, le théorème de complétude reste valide pour $DN_0^{\Rightarrow}$.

- Si on cherche à produire une démonstration, on a intérêt à avoir un *maximum* de règles (surtout si on veut une démonstration lisible).
  Mais on s'en tient à des règles valides.

$\rightsquigarrow$ Correction

- Si on veut démontrer une propriété *du système de démonstration* on a intérêt à avoir un *minimum* de règles (et même de connecteurs) pour avoir moins de cas à traiter.
  Mais on aimerait pouvoir prouver tout ce qui est vrai.

$\rightsquigarrow$ Complétude