Mise à niveau: (in)complétude

Lionel Vaux Auclair

I2M, université d'Aix-Marseille

M2 IMD

Rappel

Théorème (Complétude booléenne)

Une formule propositionnelle A est une tautologie si et seulement si $\vdash A$ est dérivable en déduction naturelle.

En plus, on peut décider si une formule A est une tautologie :
il suffit d'essayer toutes les dvv sur les atomes de A.

Teaser

Théorème (Complétude)

Une formule A est un théorème de la théorie T si et seulement si A est démontrable à partir des axiomes de T.

Théorème (Incomplétude)

Il n'y a pas de théorie :

- *contenant suffisamment d'arithmétique,*
- *complète,*
- *cohérente,*
- *récursivement énumérable.*

On ne va pas démontrer ces résultats
mais donner suffisamment de notions pour les comprendre.

Teaser

Théorème (Complétude)

Une formule A est un théorème de la théorie T si et seulement si A est démontrable à partir des axiomes de T.

Théorème (Incomplétude)

Il n'y a pas de théorie :

- *contenant suffisamment d'arithmétique,*
- *complète,*
- *cohérente,*
- *récursivement énumérable.*

On connait.

Teaser

Théorème (Complétude)

Une formule A est un théorème de la théorie T si et seulement si A est démontrable à partir des axiomes de T.

Théorème (Incomplétude)

Il n'y a pas de théorie :

- *contenant suffisamment d'arithmétique,*
- *complète,*
- *cohérente,*
- *récursivement énumérable.*

Parlons-en.

Théories

- Une théorie est un ensemble T de formules closes : les axiomes de T.
- Un modèle de T est une interprétation qui valide les axiomes de T : $\mathcal{I} \models A$ pour tout $A \in T$.
- On dit que A est un théorème de T si tout modèle de T valide A : on note $T \models A$.
- On dit qu'une théorie est cohérente si elle admet un modèle.
- On dit qu'une théorie cohérente est complète si pour toute formule close A on a $T \models A$ ou $T \models \neg A$.

Exemple

Avec les symboles du produit $\times$ et de l'égalité $=$, on peut écrire les axiomes de la théorie des groupes $T_{groupes}$.
Alors un modèle de $T_{groupes}$ est... un groupe. Youpi !

Teaser

Théorème (Complétude)

Une formule A est un théorème de la théorie T si et seulement si A est démontrable à partir des axiomes de T.

Théorème (Incomplétude)

Il n'y a pas de théorie :

- *contenant suffisamment d'arithmétique,*
- *complète,*
- *cohérente,*
- *récursivement énumérable.*

Teaser

Théorème (Complétude)

Une formule A est un théorème de la théorie T si et seulement si A est démontrable à partir des axiomes de T.

Théorème (Incomplétude)

Il n'y a pas de théorie :

- *contenant suffisamment d'arithmétique,*
- *complète,*
- *cohérente,*
- *récursivement énumérable.*

Opérations de base sur les entiers naturels.

Arithmétique de Peano

Symboles de fonctions : 0 (constante), S (unaire, $St := S(t)$), $+$ et $\times$ (binaires).

$$
\begin{array}{lc}
(A_1) & \forall x\ 0 \neq Sx \\
(A_2) & \forall x\ x = 0 \vee \exists y\ x = Sy \\
(A_3) & \forall x \forall y\ Sx = Sy \Rightarrow x = y \\
(A_4) & \forall x\ x + 0 = x \\
(A_5) & \forall x \forall y\ x + Sy = S(x + y) \\
(A_6) & \forall x\ x \times 0 = 0 \\
(A_7) & \forall x\ x \times Sy = x + x \times y
\end{array}
$$

Arithmétique de Peano

Symboles de fonctions : 0 (constante), S (unaire, $St := S(t)$), $+$ et $\times$ (binaires).

$$
\begin{array}{lc}
(A_1) & \forall x\ 0 \neq Sx \\
(A_2) & \forall x\ x = 0 \vee \exists y\ x = Sy \\
(A_3) & \forall x \forall y\ Sx = Sy \Rightarrow x = y \\
(A_4) & \forall x\ x + 0 = x \\
(A_5) & \forall x \forall y\ x + Sy = S(x + y) \\
(A_6) & \forall x\ x \times 0 = 0 \\
(A_7) & \forall x\ x \times Sy = x + x \times y
\end{array}
$$

On fait plein de choses avec ça (l'arithmétique élémentaire : P_0).

Arithmétique de Peano

Symboles de fonctions : 0 (constante), S (unaire, $St := S(t)$), $+$ et $\times$ (binaires).

$$
\begin{array}{ll}
(A_1) & \forall x\ 0 \neq Sx \\
(A_2) & \forall x\ x = 0 \vee \exists y\ x = Sy \\
(A_3) & \forall x \forall y\ Sx = Sy \Rightarrow x = y \\
(A_4) & \forall x\ x + 0 = x \\
(A_5) & \forall x \forall y\ x + Sy = S(x+y) \\
(A_6) & \forall x\ x \times 0 = 0 \\
(A_7) & \forall x\ x \times Sy = x + x \times y
\end{array}
$$

On fait plein de choses avec ça (l'arithmétique élémentaire : P_0). Mais pas tout.

Arithmétique de Peano

Symboles de fonctions : 0 (constante), S (unaire, $St := S(t)$), $+$ et $\times$ (binaires).

$$
\begin{array}{ll}
(A_1) & \forall x\ 0 \neq Sx \\
(A_2) & \forall x\ x = 0 \vee \exists y\ x = Sy \\
(A_3) & \forall x \forall y\ Sx = Sy \Rightarrow x = y \\
(A_4) & \forall x\ x + 0 = x \\
(A_5) & \forall x \forall y\ x + Sy = S(x + y) \\
(A_6) & \forall x\ x \times 0 = 0 \\
(A_7) & \forall x\ x \times Sy = x + x \times y
\end{array}
$$

On fait plein de choses avec ça (l'arithmétique élémentaire : P_0). Mais pas tout.
On ajoute tous les axiomes du *schéma de récurrence* :

$$(Rec) \qquad \forall \vec{y} A[0/x] \Rightarrow (\forall z A[z/x] \Rightarrow A[Sz/x]) \Rightarrow \forall x A$$

Arithmétique de Peano

Symboles de fonctions : 0 (constante), S (unaire, $St := S(t)$), $+$ et $\times$ (binaires).

$$
\begin{array}{ll}
(A_1) & \forall x\ 0 \neq Sx \\
(A_2) & \forall x\ x = 0 \vee \exists y\ x = Sy \\
(A_3) & \forall x \forall y\ Sx = Sy \Rightarrow x = y \\
(A_4) & \forall x\ x + 0 = x \\
(A_5) & \forall x \forall y\ x + Sy = S(x + y) \\
(A_6) & \forall x\ x \times 0 = 0 \\
(A_7) & \forall x\ x \times Sy = x + x \times y
\end{array}
$$

On fait plein de choses avec ça (l'arithmétique élémentaire : P_0). Mais pas tout.
On ajoute tous les axiomes du *schéma de récurrence* :

$$(Rec) \qquad \forall \vec{y} A[0/x] \Rightarrow (\forall z A[z/x] \Rightarrow A[Sz/x]) \Rightarrow \forall x A$$

On fait plein de choses avec ça (l'arithmétique de Peano : P).

Arithmétique de Peano

Symboles de fonctions : 0 (constante), S (unaire, $St := S(t)$), $+$ et $\times$ (binaires).

$$
\begin{array}{ll}
(A_1) & \forall x\ 0 \neq Sx \\
(A_2) & \forall x\ x = 0 \vee \exists y\ x = Sy \\
(A_3) & \forall x \forall y\ Sx = Sy \Rightarrow x = y \\
(A_4) & \forall x\ x + 0 = x \\
(A_5) & \forall x \forall y\ x + Sy = S(x+y) \\
(A_6) & \forall x\ x \times 0 = 0 \\
(A_7) & \forall x\ x \times Sy = x + x \times y
\end{array}
$$

On fait plein de choses avec ça (l'arithmétique élémentaire : P_0). Mais pas tout.
On ajoute tous les axiomes du *schéma de récurrence* :

$$(Rec) \qquad \forall \vec{y} A[0/x] \Rightarrow (\forall z A[z/x] \Rightarrow A[Sz/x]) \Rightarrow \forall x A$$

On fait plein de choses avec ça (l'arithmétique de Peano : P). Mais pas tout.

Teaser

Théorème (Complétude)

Une formule A est un théorème de la théorie T si et seulement si A est démontrable à partir des axiomes de T.

Théorème (Incomplétude)

Il n'y a pas de théorie :

- *contenant suffisamment d'arithmétique,*
- *complète,*
- *cohérente,*
- *récursivement énumérable.*

Teaser

Théorème (Complétude)

Une formule A est un théorème de la théorie T si et seulement si A est démontrable à partir des axiomes de T.

Théorème (Incomplétude)

Il n'y a pas de théorie :

- *contenant suffisamment d'arithmétique,*
- *complète,*
- *cohérente,*
- *récursivement énumérable.*

C'est de la calculabilité. . .

Teaser

Théorème (Complétude)

Une formule A est un théorème de la théorie T si et seulement si A est démontrable à partir des axiomes de T.

Théorème (Incomplétude)

Il n'y a pas de théorie :

- *contenant suffisamment d'arithmétique,*
- *complète,*
- *cohérente,*
- *récursivement énumérable.*

On a vu le cas propositionnel : regardons au premier ordre

Quantification : introduction et élimination

$$\frac{\Gamma \vdash A \qquad (x \notin \mathrm{VL}(\Gamma))}{\Gamma \vdash \forall x A}\ (\forall_i) \qquad\qquad \frac{\Gamma \vdash \forall x A}{\Gamma \vdash A[t/x]}\ (\forall_e)$$

$$\frac{\Gamma \vdash A[t/x]}{\Gamma \vdash \exists x A}\ (\exists_i) \qquad \frac{\Gamma \vdash \exists x A \qquad \Gamma, A \vdash B \qquad (x \notin \mathrm{VL}(\Gamma) \cup \mathrm{VL}(B))}{\Gamma \vdash B}\ (\exists_e)$$

Exemple : tout successeur d'un successeur est un successeur.

$$\vdash \forall x\,(\exists y\; x = SSy) \Rightarrow (\exists y\; x = Sy)$$

Exemple : tout successeur d'un successeur est un successeur.

$$\dfrac{\dfrac{\exists y\, x = SSy \vdash \exists y\, x = Sy}{\vdash (\exists y\, x = SSy) \Rightarrow (\exists y\, x = Sy)}\ (\Rightarrow_i)}{\vdash \forall x\, (\exists y\, x = SSy) \Rightarrow (\exists y\, x = Sy)}\ (\forall_i)$$

$x \notin \mathrm{VL}(\emptyset)$

Exemple : tout successeur d'un successeur est un successeur.

$$\exists y\, x = SSy \vdash \exists z\, x = Sz$$

$$||$$

$$\dfrac{\dfrac{\exists y\, x = SSy \vdash \exists y\, x = Sy}{\vdash (\exists y\, x = SSy) \Rightarrow (\exists y\, x = Sy)}\ (\Rightarrow_i)}{\vdash \forall x\, (\exists y\, x = SSy) \Rightarrow (\exists y\, x = Sy)}\ (\forall_i)$$

$x \notin \mathrm{VL}(\emptyset)$

Exemple : tout successeur d'un successeur est un successeur.

$$\dfrac{\dfrac{}{\exists y\, x = SSy \vdash \exists y\, x = SSy}\,(ax) \qquad \exists y\, x = SSy, x = SSy \vdash \exists z\, x = Sz}{\exists y\, x = SSy \vdash \exists z\, x = Sz}\,(\exists_e)$$

$$\Vert$$

$$\dfrac{\dfrac{\exists y\, x = SSy \vdash \exists y\, x = Sy}{\vdash (\exists y\, x = SSy) \Rightarrow (\exists y\, x = Sy)}\,(\Rightarrow_i)}{\vdash \forall x\,(\exists y\, x = SSy) \Rightarrow (\exists y\, x = Sy)}\,(\forall_i)$$

$$x \notin \mathrm{VL}(\emptyset)$$
$$y \notin \mathrm{VL}(\exists y\, x = SSy)$$

Exemple : tout successeur d'un successeur est un successeur.

$$
\dfrac{
  \dfrac{}{\exists y\, x = SSy \vdash \exists y\, x = SSy}\ (ax)
  \qquad
  \dfrac{
    \begin{array}{c}
      \dfrac{}{\exists y\, x = SSy, x = SSy \vdash x = SSy}\ (ax) \\
      \| \\
      \exists y\, x = SSy, x = SSy \vdash (x = Sz)[Sy/z]
    \end{array}
  }{\exists y\, x = SSy, x = SSy \vdash \exists z\, x = Sz}\ (\exists_i)
}{
  \begin{array}{c}
    \exists y\, x = SSy \vdash \exists z\, x = Sz \\
    \| \\
    \exists y\, x = SSy \vdash \exists y\, x = Sy
  \end{array}
}\ (\exists_e)
$$

$$
\dfrac{
  \dfrac{\exists y\, x = SSy \vdash \exists y\, x = Sy}{\vdash (\exists y\, x = SSy) \Rightarrow (\exists y\, x = Sy)}\ (\Rightarrow_i)
}{\vdash \forall x\, (\exists y\, x = SSy) \Rightarrow (\exists y\, x = Sy)}\ (\forall_i)
$$

$x \notin \mathrm{VL}(\emptyset)$

$y \notin \mathrm{VL}(\exists y\, x = SSy)$

$\leadsto$ S'exercer : exercice 1

Des règles pour l'égalité

$$\frac{}{\Gamma \vdash t = t}\ (=_i)$$

$$\frac{\Gamma \vdash t = u \qquad \Gamma \vdash A[t/x]}{\Gamma \vdash A[u/x]}\ (=_e)$$

Exemple : unicité du neutre

$$\vdash \forall x\, x * e = x \Rightarrow \forall x\, e' * x = x \Rightarrow e = e'$$

Exemple : unicité du neutre

$$\dfrac{\dfrac{\forall x\, x * e = x, \forall x\, e' * x = x \vdash e = e'}{\forall x\, x * e = x \vdash \forall x\, e' * x = x \Rightarrow e = e'}\ (\Rightarrow_i)}{\vdash \forall x\, x * e = x \Rightarrow \forall x\, e' * x = x \Rightarrow e = e'}\ (\Rightarrow_i)$$

Exemple : unicité du neutre

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\Gamma \vdash e' * e = e \qquad\qquad \Gamma \vdash e' * e = e'}{\Gamma \equiv \forall x\, x * e = x, \forall x\, e' * x = x \vdash e = e'}\,(=_e)}{\forall x\, x * e = x \vdash \forall x\, e' * x = x \Rightarrow e = e'}\,(\Rightarrow_i)}{\vdash \forall x\, x * e = x \Rightarrow \forall x\, e' * x = x \Rightarrow e = e'}\,(\Rightarrow_i)
$$

Exemple : unicité du neutre

$$
\dfrac{
\dfrac{
\dfrac{
\begin{array}{c}
\dfrac{\dfrac{}{\Gamma \vdash \forall x\, e' * x = x}\,(ax)}{\Gamma \vdash (e' * x = x)[e/x]}\,(\forall_e) \\
\| \\
\Gamma \vdash e' * e = e
\end{array}
\qquad
\begin{array}{c}
\dfrac{\dfrac{}{\Gamma \vdash \forall x\, x * e = x}\,(ax)}{\Gamma \vdash (x * e = x)[e'/x]}\,(\forall_e) \\
\| \\
\Gamma \vdash \textcolor{red}{e' * e} = e'
\end{array}
}{\Gamma \equiv \forall x\, x * e = x, \forall x\, e' * x = x \vdash \textcolor{red}{e} = e'}\,(=_e)
}{\forall x\, x * e = x \vdash \forall x\, e' * x = x \Rightarrow e = e'}\,(\Rightarrow_i)
}{\vdash \forall x\, x * e = x \Rightarrow \forall x\, e' * x = x \Rightarrow e = e'}\,(\Rightarrow_i)
$$

Symétrie et transitivité

Les règles suivantes sont dérivables :

$$\frac{\Gamma \vdash t = u}{\Gamma \vdash u = t}\ (=_{sym}) \qquad \frac{\Gamma \vdash t = u \quad \Gamma \vdash u = v}{\Gamma \vdash t = v}\ (=_{trans})$$

Pour la première :

$$\dfrac{\Gamma \vdash t = u \qquad \begin{array}{c} \dfrac{}{\Gamma \vdash t = t}\ (=_i) \\ \shortparallel \\ \Gamma \vdash (x = t)[t/x] \end{array}}{\begin{array}{c} \Gamma \vdash (x = t)[u/x] \\ \shortparallel \\ \Gamma \vdash u = t \end{array}}\ (=_e)$$

$\rightsquigarrow$ traitez $(=_{trans})$

Déduction naturelle : DN_1

$$\frac{\Gamma \vdash A \qquad \Gamma \vdash B}{\Gamma \vdash A \wedge B}\ (\wedge_i) \qquad \frac{\Gamma \vdash A}{\Gamma \vdash A \vee B}\ (\vee_{ig}) \qquad \frac{\Gamma \vdash B}{\Gamma \vdash A \vee B}\ (\vee_{id}) \qquad \frac{\Gamma, A \vdash B}{\Gamma \vdash A \Rightarrow B}\ (\Rightarrow_i)$$

$$\frac{\Gamma, A \vdash \bot}{\Gamma \vdash \neg A}\ (\neg_i) \qquad \frac{}{\Gamma \vdash \top}\ (\top_i) \qquad \frac{\Gamma \vdash A \qquad (x \notin VL(\Gamma))}{\Gamma \vdash \forall x A}\ (\forall_i) \qquad \frac{\Gamma \vdash A[t/x]}{\Gamma \vdash \exists x A}\ (\exists_i) \qquad \frac{}{\Gamma \vdash t = t}\ (=_i)$$

$$\frac{\Gamma \vdash A \wedge B}{\Gamma \vdash A}\ (\wedge_{eg}) \qquad \frac{\Gamma \vdash A \wedge B}{\Gamma \vdash B}\ (\wedge_{ed}) \qquad \frac{\Gamma \vdash A \vee B \qquad \Gamma, A \vdash C \qquad \Gamma, B \vdash C}{\Gamma \vdash C}\ (\vee_e)$$

$$\frac{\Gamma \vdash A \Rightarrow B \qquad \Gamma \vdash A}{\Gamma \vdash B}\ (\Rightarrow_e) \qquad \frac{\Gamma \vdash \neg A \qquad \Gamma \vdash A}{\Gamma \vdash \bot}\ (\neg_e) \qquad \frac{\Gamma \vdash \bot}{\Gamma \vdash A}\ (\bot_e)$$

$$\frac{\Gamma \vdash \forall x A}{\Gamma \vdash A[t/x]}\ (\forall_e) \qquad \frac{\Gamma \vdash \exists x A \qquad \Gamma, A \vdash B \qquad (x \notin VL(\Gamma) \cup VL(B))}{\Gamma \vdash B}\ (\exists_e) \qquad \frac{\Gamma \vdash t = u \qquad \Gamma \vdash A[t/x]}{\Gamma \vdash A[u/x]}\ (=_e)$$

$$\frac{}{\Gamma, A \vdash A}\ (ax) \qquad \frac{\Gamma, \neg A \vdash \bot}{\Gamma \vdash A}\ (r.a.) \qquad \frac{\Gamma \vdash B}{\Gamma, A \vdash B}\ (aff) \qquad \frac{\Gamma, A, A \vdash B}{\Gamma, A \vdash B}\ (cont) \qquad \frac{\Gamma, A, B, \Gamma' \vdash C}{\Gamma, B, A, \Gamma' \vdash C}\ (ech)$$

$\leadsto$ S'exercer : exercices 2 à 4

Démonstration dans une théorie

Définition

Le séquent $\Gamma \vdash A$ est dérivable à partir de T s'il existe un argument (dans DN_1) :

- de conclusion $\Gamma \vdash A$ et
- dont toutes les prémisses sont de la forme $\vdash F$ avec $F \in T$.

On note alors $\Gamma \vdash_T A$.

Par exemple dans l'arithmétique de Peano :

$$\vdash \forall x. x \times SS0 = x + x$$

Démonstration dans une théorie

Définition

Le séquent $\Gamma \vdash A$ est dérivable à partir de T s'il existe un argument (dans DN_1) :

- de conclusion $\Gamma \vdash A$ et
- dont toutes les prémisses sont de la forme $\vdash F$ avec $F \in T$.

On note alors $\Gamma \vdash_T A$.

Par exemple dans l'arithmétique de Peano :

$$\dfrac{\dfrac{\vdash x \times S0 = x \qquad \vdash x \times SS0 = x + (x \times S0)}{\vdash x \times SS0 = x + x}\,(=_e)}{\vdash \forall x. x \times SS0 = x + x}\,(\forall_i)$$

Démonstration dans une théorie

Définition

Le séquent $\Gamma \vdash A$ est dérivable à partir de T s'il existe un argument (dans DN_1) :

- de conclusion $\Gamma \vdash A$ et
- dont toutes les prémisses sont de la forme $\vdash F$ avec $F \in T$.

On note alors $\Gamma \vdash_T A$.

Par exemple dans l'arithmétique de Peano :

$$\dfrac{\dfrac{\vdash x \times S0 = x \qquad \dfrac{\dfrac{\vdash A_7}{\vdash \forall y.x \times Sy = x + (x \times y)}\,(\forall_e)}{\vdash x \times SS0 = x + (x \times S0)}\,(\forall_e)}{\vdash x \times SS0 = x + x}\,(=_e)}{\vdash \forall x.x \times SS0 = x + x}\,(\forall_i)$$

Démonstration dans une théorie

Définition

Le séquent $\Gamma \vdash A$ est dérivable à partir de T s'il existe un argument (dans DN_1) :

- de conclusion $\Gamma \vdash A$ et
- dont toutes les prémisses sont de la forme $\vdash F$ avec $F \in T$.

On note alors $\Gamma \vdash_T A$.

Par exemple dans l'arithmétique de Peano :

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\vdash A_4}{\vdash x + 0 = x}\,(\forall_e) \qquad \vdash x \times S0 = x + 0}{\vdash x \times S0 = x}\,(=_e) \qquad \dfrac{\dfrac{\vdash A_7}{\vdash \forall y. x \times Sy = x + (x \times y)}\,(\forall_e)}{\vdash x \times SS0 = x + (x \times S0)}\,(\forall_e)}{\vdash x \times SS0 = x + x}\,(=_e)}{\vdash \forall x. x \times SS0 = x + x}\,(\forall_i)$$

Démonstration dans une théorie

Définition

Le séquent $\Gamma \vdash A$ est dérivable à partir de T s'il existe un argument (dans DN_1) :

- de conclusion $\Gamma \vdash A$ et
- dont toutes les prémisses sont de la forme $\vdash F$ avec $F \in T$.

On note alors $\Gamma \vdash_T A$.

Par exemple dans l'arithmétique de Peano :

$$
\dfrac{
  \dfrac{
    \dfrac{\vdash A_4}{\vdash x + 0 = x}\,(\forall_e)
    \qquad
    \dfrac{
      \dfrac{\vdash A_6}{\vdash x \times 0 = 0}\,(\forall_e)
      \quad
      \dfrac{\dfrac{\vdash A_7}{\vdash \forall y. x \times Sy = x + (x \times y)}\,(\forall_e)}{\vdash x \times S0 = x + (x \times 0)}\,(\forall_e)
    }{\vdash x \times S0 = x + 0}\,(=_e)
  }{\vdash x \times S0 = x}\,(=_e)
  \qquad
  \dfrac{\dfrac{\vdash A_7}{\vdash \forall y. x \times Sy = x + (x \times y)}\,(\forall_e)}{\vdash x \times SS0 = x + (x \times S0)}\,(\forall_e)
}{
  \dfrac{\vdash x \times SS0 = x + x}{\vdash \forall x. x \times SS0 = x + x}\,(\forall_i)
}\,(=_e)
$$

Démonstration dans une théorie

Ça revient à rajouter une règle : $\overline{\Gamma \vdash A}$ (A) pour chaque $A \in T$.
En effet, en notant $DN_1 \cup T$ le système associé :

Lemme

Les trois propriétés suivantes sont équivalentes :

1. $\Gamma \vdash_T A$;
2. $\Gamma \vdash A$ *est dérivable dans* $DN_1 \cup T$;
3. $T, \Gamma \vdash_{DN_1} A$, *c'est-à-dire : il existe un contexte* Δ *ne contenant que des formules de* T *tel que* $\Delta, \Gamma \vdash A$ *soit dérivable dans* DN_1.

Démonstration: Application directe des définitions : vérifiez que c'est évident pour vous. □

Démonstration dans une théorie

Ça revient à rajouter une règle : $\dfrac{}{\Gamma \vdash A}\,(A)$ pour chaque $A \in T$.
En effet, en notant $DN_1 \cup T$ le système associé :

Lemme

Les trois propriétés suivantes sont équivalentes :

1. $\Gamma \vdash_T A$;
2. $\Gamma \vdash A$ *est dérivable dans* $DN_1 \cup T$;
3. $T, \Gamma \vdash_{DN_1} A$, *c'est-à-dire : il existe un contexte* Δ *ne contenant que des formules de* T *tel que* $\Delta, \Gamma \vdash A$ *soit dérivable dans* DN_1.

Démonstration: Application directe des définitions : vérifiez que c'est évident pour vous. $\square$

$\rightsquigarrow$ S'exercer, dans le cas de l'arithmétique : exercices 5 à 6

Correction

Si $\Gamma = A_1, \ldots, A_n$, on note $\Gamma \Rightarrow B := A_1 \Rightarrow \cdots \Rightarrow A_n \Rightarrow B$.
On dit que le séquent $\Gamma \vdash B$ est valide dans T, et on note $\Gamma \models_T B$, si $T \models \Gamma \Rightarrow B$.

Théorème (Correction)

Si $\Gamma \vdash_T B$ alors $\Gamma \models_T B$

Démonstration: L'hypothèse donne un argument de conclusion $\Gamma \vdash_T B$ et de prémisses de la forme $\vdash F$ avec $F \in T$. On a donc $\models_T F$ pour chacune des prémisses et, comme toutes les règles de DN_1 sont correctes, l'argument préserve la validité. $\square$

Correction

Si $\Gamma = A_1, \ldots, A_n$, on note $\Gamma \Rightarrow B := A_1 \Rightarrow \cdots \Rightarrow A_n \Rightarrow B$.
On dit que le séquent $\Gamma \vdash B$ est valide dans T, et on note $\Gamma \models_T B$, si $T \models \Gamma \Rightarrow B$.

Théorème (Correction)

Si $\Gamma \vdash_T B$ *alors* $\Gamma \models_T B$

Démonstration: L'hypothèse donne un argument de conclusion $\Gamma \vdash_T B$ et de prémisses de la forme $\vdash F$ avec $F \in T$. On a donc $\models_T F$ pour chacune des prémisses et, comme toutes les règles de DN_1 sont correctes, l'argument préserve la validité. □

Encore une fois : encore heureux !

Cohérence et contradiction

Remarque

T est incohérente ssi $\models_T \bot$.

Cohérence et contradiction

Remarque

T est incohérente ssi $\models_T \bot$.

Définition

On dit que T est contradictoire si $\vdash_T \bot$.

Reformulons :

Théorème (Correction)

- *Si* $\Gamma \vdash_T B$ *alors* $\Gamma \models_T B$
- *Si* $\Gamma \not\models_T B$ *alors* $\Gamma \nvdash_T B$
- *Si T est cohérente, alors elle n'est pas contradictoire.*
- *Si T est contradictoire, alors elle incohérente.*

Complétude

Théorème (Complétude)

- *Si* $\Gamma \models_T B$ *alors* $\Gamma \vdash_T B$
- *Si* $\nvdash_T \perp$ *alors* T *est cohérente.*

Démonstration: (à la louche) Soit T non contradictoire :

- On peut étendre T et sa signature en ajoutant des symboles de constantes, pour obtenir une théorie non contradictoire $T' \supset T$ telle que $\vdash_T \exists x\, A \Rightarrow A[c_A/x]$ pour toute formule A avec $\mathrm{VL}(A) \subset \{x\}$.
- On peut étendre T' en une théorie complète et non contradictoire $T^* \supset T'$.
- On construit le modèle syntaxique : les individus sont les termes clos du langage de T', quotientés par les égalités prouvables dans T^*.
- C'est un modèle de T, qui est donc cohérente.

$\square$

Corollaires

Théorème (Compacité)

Une théorie T est cohérente ssi toute partie finie de T est cohérente.

Démonstration: On a vu que $\vdash_T \perp$ ssi il existe un contexte $\Delta \subset T$ t.q. $\Delta \vdash \perp$. $\square$

$\rightsquigarrow$ Application : exercice 7

Théorème (Löwenheim–Skolem)

Si le langage de T est dénombrable et T est cohérente alors T admet un modèle dont le support est dénombrable.

Démonstration: Le modèle syntaxique sur un langage dénombrable est de support dénombrable. $\square$

Relation à d'autres systèmes

Soit $\mathcal{L}$ un système logique :

- si les règles de $\mathcal{L}$ sont admissibles dans DN_1 alors $\mathcal{L}$ est correct ;
- si les règles de DN_1 sont admissibles dans $\mathcal{L}$ alors $\mathcal{L}$ est complet.

Par exemple on peut se contenter des règles (ax), $(r.a.)$, $(\Rightarrow_i)$, $(\Rightarrow_e)$, $(\forall_i)$ et $(\forall_e)$ pour avoir un système complet (modulo De Morgan).

Le premier théorème d'incomplétude de Gödel

Théorème

Si la théorie T est cohérente et récursive,[1] *et contient l'arithmétique élémentaire alors T est incomplète.*

Démonstration: (au lance-pierre)

- on peut coder les suites finies d'entiers, les formules et les démonstrations comme des entiers, tous ces codages étant des fonctions récursives et d'image récursive
- les fonctions récursives sont représentables par des formules en arithmétique élémentaire
- en particulier il y a une formule $Dem_T[x, y]$ qui dit « *x est la plus petite preuve de y* » ou plutôt : « *x est le plus petit entier qui est le code d'une preuve de la formule codée par y* »
- par diagonalisation (cf. la preuve que $\mathbf{R}$ n'est pas dénombrable, ou le paradoxe de Russel, ou le théorème de l'arrêt) on obtient une formule G_T telle que $\vdash_T G_T \Leftrightarrow \neg\exists z.Dem_T[z, code(G_T)]$
- alors G_T est démontrable dans T ssi $\neg G_T$ l'est

□

1. En tant qu'ensemble : la fonction caractéristique doit être calculable.

Exemples

- PA n'est pas complète
- on peut construire $\mathbf{N}$ dans ZF comme l'ensemble ω des ordinaux finis et alors les axiomes de PA relativisés à ω sont prouvables : donc ZF n'est pas complète

Le second théorème d'incomplétude de Gödel

Théorème

Si la théorie T est cohérente et récursive, et contient l'arithmétique de Peano, alors la formule $Coh_T := \neg\exists z.Dem_T[z, code(\bot)]$ exprimant la cohérence de T n'est pas démontrable dans T.

Démonstration: (au bazooka)

- on peut formaliser la preuve du premier théorème d'incomplétude dans PA
- on obtient une preuve formelle de $Coh_T \Rightarrow \neg\exists z.Dem_T[z, code(G_T)]$ donc de $Coh_T \Rightarrow G_T$
- or G_T n'est pas démontrable

$\square$

Le second théorème d'incomplétude de Gödel

Théorème

Si la théorie T est cohérente et récursive, et contient l'arithmétique de Peano, alors la formule $Coh_T := \neg\exists z.Dem_T[z, code(\perp)]$ exprimant la cohérence de T n'est pas démontrable dans T.

Démonstration: (au bazooka)

- on peut formaliser la preuve du premier théorème d'incomplétude dans PA
- on obtient une preuve formelle de $Coh_T \Rightarrow \neg\exists z.Dem_T[z, code(G_T)]$ donc de $Coh_T \Rightarrow G_T$
- or G_T n'est pas démontrable

□

Des détails ?

- Plein de livres
- Une référence assez complète mais concise et très lisible :
  Les théorèmes d'incomplétude de Gödel, par Alexandre Miquel
  `http://perso.ens-lyon.fr/natacha.portier/enseign/logique/GoedelParAlex.pdf`

Corollaires

Applications directes :

- on ne peut pas montrer Coh_{PA} dans PA
- on ne peut pas montrer Coh_{ZF} dans ZF
- mais on peut montrer Coh_{PA} dans ZF puisque $\omega \models PA$

Mais aussi :

- la théorie $N = \{A$ formule close de l'arithmétique t.q. $\mathbf{N} \models A\}$, n'est pas récursive
- si T est une théorie cohérente et récursive contenant l'arithmétique élémentaire, alors aucun des deux ensembles (récursivement énumérables)

$$P = \{A \in \mathcal{F} \text{ t.q. } \vdash_T A\} \qquad R = \{A \in \mathcal{F} \text{ t.q. } \vdash_T \neg A\}$$

  n'est récursif
- l'ensemble des tautologies (sur le langage de l'arithmétique) n'est pas récursif