Calcul des séquents

Lionel Vaux Auclair

I2M, université d'Aix-Marseille

M2 IMD

Élimination *vs* Introduction

- Les règles d'élimination c'est mal :
  - on ne sait pas laquelle choisir quand on cherche une preuve ;
  - ça fait intervenir des formules sans lien avec la conclusion ;
- Les règles d'introduction c'est bien :
  - on sait laquelle choisir (sauf pour $\vee$)
  - il n'y a rien à inventer pour l'appliquer (sauf pour $\exists$)
  - et on ne peut pas en déduire $\vdash \bot$.

La coupure

$$\dfrac{\Gamma, A \vdash B \qquad \Gamma \vdash A}{\Gamma \vdash B}\ (cut) \qquad \sim \qquad \dfrac{\dfrac{\Gamma, A \vdash B}{\Gamma \vdash A \Rightarrow B}\ (\Rightarrow_i) \qquad \Gamma \vdash A}{\Gamma \vdash B}\ (\Rightarrow_e)$$

La coupure

$$\frac{\Gamma, A \vdash B \qquad \Gamma \vdash A}{\Gamma \vdash B}\ (cut) \qquad \sim \qquad \frac{\dfrac{\Gamma, A \vdash B}{\Gamma \vdash A \Rightarrow B}\ (\Rightarrow_i) \qquad \Gamma \vdash A}{\Gamma \vdash B}\ (\Rightarrow_e)$$

- découpe une preuve en deux étapes, typiquement :

$$\frac{\mathit{Théorie} \vdash \mathit{Lemme} \qquad \mathit{Théorie}, \mathit{Lemme} \vdash \mathit{Théorème}}{\mathit{Théorie} \vdash \mathit{Théorème}}\ (cut)$$

La coupure

$$\frac{\Gamma, A \vdash B \qquad \Gamma \vdash A}{\Gamma \vdash B}\,(cut) \qquad \sim \qquad \frac{\dfrac{\Gamma, A \vdash B}{\Gamma \vdash A \Rightarrow B}\,(\Rightarrow_i) \qquad \Gamma \vdash A}{\Gamma \vdash B}\,(\Rightarrow_e)$$

- découpe une preuve en deux étapes, typiquement :

$$\frac{\mathit{Théorie} \vdash \mathit{Lemme} \qquad \mathit{Théorie}, \mathit{Lemme} \vdash \mathit{Théorème}}{\mathit{Théorie} \vdash \mathit{Théorème}}\,(cut)$$

- réduit les éliminations à des introductions *dans les hypothèses*

$$\frac{\Gamma \vdash A \vee B \qquad \Gamma, A \vdash C \qquad \Gamma, B \vdash C}{\Gamma \vdash C}\,(\vee_e) \qquad \sim \qquad \frac{\Gamma \vdash A \vee B \qquad \dfrac{\Gamma, A \vdash C \qquad \Gamma, B \vdash C}{\Gamma, A \vee B \vdash C}\,(\vee_g)}{\Gamma \vdash C}\,(cut)$$

Règles gauches

Les règles suivantes sont dérivables en déduction naturelle :

$$\frac{\Gamma, A, B \vdash C}{\Gamma, A \wedge B \vdash C}\ (\wedge_g) \qquad \frac{\Gamma, A \vdash C \qquad \Gamma, B \vdash C}{\Gamma, A \vee B \vdash C}\ (\vee_g)$$

$$\frac{\Gamma \vdash A \qquad \Gamma, B \vdash C}{\Gamma, A \Rightarrow B \vdash C}\ (\Rightarrow_g) \qquad \frac{\Gamma \vdash A}{\Gamma, \neg A \vdash C}\ (\neg_g) \qquad \frac{}{\Gamma, \bot \vdash C}\ (\bot_g)$$

$$\frac{\Gamma, A[t/x] \vdash C}{\Gamma, \forall x A \vdash C}\ (\forall_g) \qquad \frac{\Gamma, A \vdash C \qquad (x \notin \mathrm{VL}(\Gamma) \cup \mathrm{VL}(C))}{\Gamma, \exists x A \vdash C}\ (\exists_g)$$

chaque fois en utilisant les règles d'élimination sur les hypothèses *via* (ax)

$\rightsquigarrow$ Vérifiez bien que vous savez le montrer.

à partir de ce point on oublie les règles pour l'égalité :
on se concentre sur le contenu *logique*

LJ

$$\frac{}{\Gamma, A \vdash A}\ (ax) \qquad \frac{\Gamma \vdash A \qquad \Gamma, A \vdash C}{\Gamma \vdash C}\ (cut) \qquad \frac{\Gamma, A, B, \Gamma' \vdash C}{\Gamma, B, A, \Gamma' \vdash C}\ (ech) \qquad \frac{\Gamma \vdash \Delta}{\Gamma, A \vdash \Delta}\ (aff) \qquad \frac{\Gamma, A, A \vdash \Delta}{\Gamma, A \vdash \Delta}\ (cont)$$

$$\frac{\Gamma \vdash A \qquad \Gamma, B \vdash C}{\Gamma, A \Rightarrow B \vdash C}\ (\Rightarrow_g) \qquad \frac{\Gamma, A \vdash B}{\Gamma \vdash A \Rightarrow B}\ (\Rightarrow_d)$$

$$\frac{}{\Gamma, \bot \vdash C}\ (\bot_g) \qquad \frac{}{\Gamma \vdash \top}\ (\top_d)$$

$$\frac{\Gamma, A \vdash C}{\Gamma, A \wedge B \vdash C}\ (\wedge_{gg}) \qquad \frac{\Gamma, B \vdash C}{\Gamma, A \wedge B \vdash C}\ (\wedge_{gd}) \qquad \frac{\Gamma \vdash A \qquad \Gamma \vdash B}{\Gamma \vdash A \wedge B}\ (\wedge_d)$$

$$\frac{\Gamma, A \vdash C \qquad \Gamma, B \vdash C}{\Gamma, A \vee B \vdash C}\ (\vee_g) \qquad \frac{\Gamma \vdash A}{\Gamma \vdash A \vee B}\ (\vee_{dg}) \qquad \frac{\Gamma \vdash B}{\Gamma \vdash A \vee B}\ (\vee_{dd})$$

$$\frac{\Gamma \vdash A}{\Gamma, \neg A \vdash \bot}\ (\neg_g) \qquad \frac{\Gamma, A \vdash \bot}{\Gamma \vdash \neg A}\ (\neg_d)$$

$$\frac{\Gamma, A[t/x] \vdash C}{\Gamma, \forall x A \vdash C}\ (\forall_g) \qquad \frac{\Gamma \vdash A \qquad x \notin \mathrm{VL}(\Gamma)}{\Gamma \vdash \forall x A}\ (\forall_d)$$

$$\frac{\Gamma, A \vdash C \qquad x \notin \mathrm{VL}(\Gamma, C)}{\Gamma, \exists x A \vdash C}\ (\exists_g) \qquad \frac{\Gamma \vdash A[t/x]}{\Gamma \vdash \exists x A}\ (\exists_d)$$

Logique intuitionniste

Soit *NJ* le système de déduction naturelle sans règle pour l'égalité ni raisonnement *classique* : $(r.a.)$, $(t.e.)$, *etc.*.

Théorème

$\Gamma \vdash_{NJ} A$ *ssi* $\Gamma \vdash_{LJ} A$.

Démonstration: Les règles de *NJ* sont dérivables dans *LJ* et réciproquement. □

La logique intuitionniste, c'est ce qui est prouvable dans *LJ* (ou *NJ*, donc).

LJ n'est pas un système dans lequel on aimerait *écrire* des preuves,
mais c'est un système utile pour *raisonner* sur les preuves.

De l'intérêt d'éliminer les coupures

Théorème (Constructivité)

- *Une preuve dans* $LJ \setminus \{(cut)\}$ *de* $\vdash A \vee B$ *donne une preuve de* $\vdash A$ *ou une preuve de* $\vdash B$.
- *Une preuve dans* $LJ \setminus \{(cut)\}$ *de* $\vdash \exists y A$ *donne un terme* t *tel que* $\vdash A[t/y]$.

Théorème (Sous-formule)

Toutes les formules qui apparaissent dans une preuve sans coupure de $\Gamma \vdash A$, *sont des sous-formules des formules de* Γ *et de* A.

(il faut considérer que $A[t/x]$ *est une sous-formule de* $\forall x A$ *et* $\exists x A$*)*

Théorème (Recherche de preuve)

Si $\Gamma \vdash A$ *est sans quantificateurs, l'ensemble des arguments sans coupures de conclusion* $\Gamma \vdash A$ *est fini.*

(modulo une petite subtilité sur les règles structurelles)

Séquents classiques

Les règles de raisonnement classique sont avantageusement remplacées par une extension du système :
on considère des séquents de la forme

$$A_1, \ldots, A_n \vdash B_1, \ldots, B_k$$

à lire

$$\text{« } B_1 \vee \cdots \vee B_k \text{ se déduit de } A_1 \wedge \cdots \wedge A_n \text{ ».}$$

LK

$$\frac{}{\Gamma, A \vdash A, \Delta}\ (ax) \qquad \frac{\Gamma \vdash A, \Delta \qquad \Gamma, A \vdash \Delta}{\Gamma \vdash \Delta}\ (cut) \qquad \frac{\Gamma, A, B, \Gamma' \vdash \Delta}{\Gamma, B, A, \Gamma' \vdash \Delta}\ (ech_g) \qquad \frac{\Gamma \vdash \Delta, A, B, \Delta'}{\Gamma \vdash \Delta, B, A, \Delta'}\ (ech_d)$$

$$\frac{\Gamma \vdash \Delta}{\Gamma, A \vdash \Delta}\ (aff_g) \qquad \frac{\Gamma, A, A \vdash \Delta}{\Gamma, A \vdash \Delta}\ (cont_g) \qquad \frac{\Gamma \vdash \Delta}{\Gamma \vdash A, \Delta}\ (aff_d) \qquad \frac{\Gamma \vdash A, A, \Delta}{\Gamma \vdash A, \Delta}\ (cont_d)$$

$$\frac{}{\Gamma, \bot \vdash \Delta}\ (\bot_g) \qquad \frac{}{\Gamma \vdash \top, \Delta}\ (\top_d)$$

$$\frac{\Gamma, A \vdash \Delta}{\Gamma, A \wedge B \vdash \Delta}\ (\wedge_{gg}) \qquad \frac{\Gamma, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \wedge B \vdash \Delta}\ (\wedge_{gd}) \qquad \frac{\Gamma \vdash A, \Delta \qquad \Gamma \vdash B, \Delta}{\Gamma \vdash A \wedge B, \Delta}\ (\wedge_d)$$

$$\frac{\Gamma, A \vdash \Delta \qquad \Gamma, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \vee B \vdash \Delta}\ (\vee_g) \qquad \frac{\Gamma \vdash A, \Delta}{\Gamma \vdash A \vee B, \Delta}\ (\vee_{dg}) \qquad \frac{\Gamma \vdash B, \Delta}{\Gamma \vdash A \vee B, \Delta}\ (\vee_{dd})$$

$$\frac{\Gamma \vdash A, \Delta}{\Gamma, \neg A \vdash \Delta}\ (\neg_g) \qquad \frac{\Gamma, A \vdash \Delta}{\Gamma \vdash \neg A, \Delta}\ (\neg_d)$$

$$\frac{\Gamma, A[t/x] \vdash \Delta}{\Gamma, \forall x A \vdash \Delta}\ (\forall_g) \qquad \frac{\Gamma \vdash A, \Delta \qquad x \notin \mathrm{VL}(\Gamma, \Delta)}{\Gamma \vdash \forall x A, \Delta}\ (\forall_d)$$

$$\frac{\Gamma, A \vdash \Delta \qquad x \notin \mathrm{VL}(\Gamma, \Delta)}{\Gamma, \exists x A \vdash \Delta}\ (\exists_g) \qquad \frac{\Gamma \vdash A[t/x], \Delta}{\Gamma \vdash \exists x A, \Delta}\ (\exists_d)$$

LK

$$\frac{}{\Gamma, A \vdash A, \Delta}\ (ax) \qquad \frac{\Gamma \vdash A, \Delta \qquad \Gamma, A \vdash \Delta}{\Gamma \vdash \Delta}\ (cut) \qquad \frac{\Gamma, A, B, \Gamma' \vdash \Delta}{\Gamma, B, A, \Gamma' \vdash \Delta}\ (ech_g) \qquad \frac{\Gamma \vdash \Delta, A, B, \Delta'}{\Gamma \vdash \Delta, B, A, \Delta'}\ (ech_d)$$

$$\frac{\Gamma \vdash \Delta}{\Gamma, A \vdash \Delta}\ (aff_g) \qquad \frac{\Gamma, A, A \vdash \Delta}{\Gamma, A \vdash \Delta}\ (cont_g) \qquad \frac{\Gamma \vdash \Delta}{\Gamma \vdash A, \Delta}\ (aff_d) \qquad \frac{\Gamma \vdash A, A, \Delta}{\Gamma \vdash A, \Delta}\ (cont_d)$$

$$\frac{}{\Gamma, \bot \vdash \Delta}\ (\bot_g) \qquad \frac{}{\Gamma \vdash \top, \Delta}\ (\top_d)$$

$$\frac{\Gamma, A, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \wedge B \vdash \Delta}\ (\wedge_g) \qquad \frac{\Gamma \vdash A, \Delta \qquad \Gamma \vdash B, \Delta}{\Gamma \vdash A \wedge B, \Delta}\ (\wedge_d)$$

$$\frac{\Gamma, A \vdash \Delta \qquad \Gamma, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \vee B \vdash \Delta}\ (\vee_g) \qquad \frac{\Gamma \vdash A, B, \Delta}{\Gamma \vdash A \vee B, \Delta}\ (\vee_d)$$

$$\frac{\Gamma \vdash A, \Delta}{\Gamma, \neg A \vdash \Delta}\ (\neg_g) \qquad \frac{\Gamma, A \vdash \Delta}{\Gamma \vdash \neg A, \Delta}\ (\neg_d)$$

$$\frac{\Gamma, A[t/x] \vdash \Delta}{\Gamma, \forall x A \vdash \Delta}\ (\forall_g) \qquad \frac{\Gamma \vdash A, \Delta \qquad x \notin \mathrm{VL}(\Gamma, \Delta)}{\Gamma \vdash \forall x A, \Delta}\ (\forall_d)$$

$$\frac{\Gamma, A \vdash \Delta \qquad x \notin \mathrm{VL}(\Gamma, \Delta)}{\Gamma, \exists x A \vdash \Delta}\ (\exists_g) \qquad \frac{\Gamma \vdash A[t/x], \Delta}{\Gamma \vdash \exists x A, \Delta}\ (\exists_d)$$

Implication classique

Le connecteur $\Rightarrow$ devient redondant : en posant $A \Rightarrow B := \neg A \vee B$

$$\frac{\Gamma, A \vdash B, \Delta}{\Gamma \vdash A \Rightarrow B, \Delta} \ (\Rightarrow_d) \qquad \frac{\Gamma \vdash A, \Delta \qquad \Gamma, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \Rightarrow B \vdash \Delta} \ (\Rightarrow_g)$$

sont dérivables.

$\rightsquigarrow$ Montrez-le.

Pause !

$\rightsquigarrow$ Prenez le temps de démontrer chacune des lois de De Morgan (*cf.* Exercices 2 des deux feuilles précédentes) dans ce nouveau système.

Quelques remarques

- Les dualités de De Morgan se traduisent par une symétrie sur les règles gauches et droites.
- On n'a pas vraiment besoin de $\perp$: l'absurdité, c'est « $\vdash$ ».
- On obtient LJ en restreignant LK aux séquents avec au plus une formule à droite ($\Gamma \vdash \perp$ devient $\Gamma \vdash$).

Logique classique

On dérive facilement :

$$\dfrac{\Gamma, \neg A \vdash \qquad \dfrac{\dfrac{}{\Gamma, A \vdash A}\,(ax)}{\Gamma \vdash \neg A, A}\,(\neg_d)}{\Gamma \vdash A}\,(cut) \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\Gamma, A \vdash A}\,(ax)}{\Gamma \vdash A, \neg A}\,(\neg_d)}{\Gamma \vdash A \vee \neg A}\,(\vee_d) \qquad etc.$$

$\rightsquigarrow$ Montrez que chaque règle de raisonnement sur les valeurs de vérité est admissible dans LK

On note NK le système de déduction naturelle classique ($NK = NJ + (r.a.)$).

Théorème

Si $\Gamma \vdash_{NK} A$ alors $\Gamma \vdash_{LK} A$.

Démonstration: Les règles de NK sont admissibles dans LK. □

Théorème

Si $\Gamma \vdash_{LK} \Delta$ alors $\Gamma, \neg\Delta \vdash_{NK} \bot$. Et si $\Gamma \vdash_{LK} A$ alors $\Gamma \vdash_{NK} A$.

Démonstration: Il suffit de prendre chaque règle de LK, de tout faire passer à gauche par négation, et de montrer que cette nouvelle règle est admissible dans NK. □

Teaser

La prochaine fois, on démontrera :

Théorème

Si $\Gamma \vdash \Delta$ *est dérivable dans* LK *(resp.* LJ*) alors ce séquent est dérivable dans le même système sans* (cut)*.*

De l'intérêt d'éliminer les coupures

Théorème (Sous-formule)

Toutes les formules qui apparaissent dans une preuve sans coupure de $\Gamma \vdash \Delta$*, sont des sous-formules des formules de* Γ, Δ*.*

Corollaire

Le fragment propositionnel est décidable.

Mais on le savait.

Corollaire

Le système est cohérent

Mais on le savait.

C'est surtout intéressant si on parvient à étendre le résultat au système étendu avec les axiomes de Peano.

$\rightsquigarrow$ C'est ce qu'a fait Gentzen, qui a inventé LK pour ça.

Version multiplicative

LK est équivalent à LK_m :

$$\frac{}{A \vdash A}\ (ax) \qquad \frac{\Gamma \vdash A, \Delta \qquad \Gamma', A \vdash \Delta'}{\Gamma, \Gamma' \vdash \Delta, \Delta'}\ (\mathit{cut}) \qquad \frac{\Gamma, A, B, \Gamma' \vdash \Delta}{\Gamma, B, A, \Gamma' \vdash \Delta}\ (ech_g) \qquad \frac{\Gamma \vdash \Delta, A, B, \Delta'}{\Gamma \vdash \Delta, B, A, \Delta'}\ (ech_d)$$

$$\frac{\Gamma, A, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \wedge B \vdash \Delta}\ (\wedge_g) \qquad \frac{\Gamma \vdash A, \Delta \qquad \Gamma' \vdash B, \Delta'}{\Gamma, \Gamma' \vdash A \wedge B, \Delta, \Delta'}\ (\wedge_d)$$

$$\frac{\Gamma, A \vdash \Delta \qquad \Gamma', B \vdash \Delta'}{\Gamma, \Gamma', A \vee B \vdash \Delta, \Delta'}\ (\vee_g) \qquad \frac{\Gamma \vdash A, B, \Delta}{\Gamma \vdash A \vee B, \Delta}\ (\vee_d)$$

$$\frac{\Gamma \vdash \Delta}{\Gamma, \top \vdash \Delta}\ (\top_g) \qquad \frac{}{\vdash \top}\ (\top_d)$$

$$\frac{}{\bot \vdash}\ (\bot_g) \qquad \frac{\Gamma \vdash \Delta}{\Gamma \vdash \bot, \Delta}\ (\bot_d)$$

$$\ldots$$

(les règles structurelles, et celles pour la négation et la quantification restant les mêmes)

Développement des axiomes

Si A n'est pas une formule atomique, on peut dériver l'axiome sur A à partir des axiomes sur ses sous-formules :

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{A \vdash A}\,(ax) \qquad \dfrac{}{B \vdash B}\,(ax)}{A, B \vdash A \wedge B}\,(\wedge_d)}{A \wedge B \vdash A \wedge B}\,(\wedge_g) \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{}{A \vdash A}\,(ax)}{\forall x A \vdash A}\,(\forall_g)}{\forall x A \vdash \forall x A}\,(\forall_d) \qquad \dots$$

$\rightsquigarrow$ Faites-le pour les autres connecteurs et pour $\exists$.

Les axiomes généraux sont donc dérivables à partir des axiomes atomiques :

$$\dfrac{}{X \vdash X}\,(ax) \quad \text{ou} \quad \dfrac{}{R(t_1, \dots, t_n) \vdash R(t_1, \dots, t_n)}\,(ax)$$

$\rightsquigarrow$ Montrez, par induction sur A, que $A \vdash A$ est dérivable en n'utilisant que des axiomes atomiques.

Réversibilité

Certaines règles sont réversibles :
si la conclusion est dérivable, alors les prémisses le sont.

Exemple

$$\frac{\Gamma, A \vdash B}{\Gamma \vdash A \Rightarrow B}\ (\Rightarrow_i) \qquad \frac{\Gamma, A, A \vdash \Delta}{\Gamma, A \vdash \Delta}\ (cont_g) \qquad \frac{\Gamma, A \vdash \Delta \qquad \Gamma, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \vee B \vdash \Delta}\ (\vee_g) \qquad \frac{}{A \vdash A}\ (ax) \qquad \ldots$$

Dans un argument ne comportant que des règles réversibles,
la conclusion est dérivable ssi les prémisses le sont.

Complétude booléenne pour LK

Soit le système LK_0 constitué des règles :

$$\frac{}{X_1, \ldots, X_n, Z \vdash Z, Y_1, \ldots, Y_k}\ (ax_0)$$

$$\frac{\Gamma, A, B \vdash C}{\Gamma, A \wedge B \vdash C}\ (\wedge_g) \qquad \frac{\Gamma, A \vdash \Delta \qquad \Gamma, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \vee B \vdash \Delta}\ (\vee_g) \qquad \frac{\Gamma \vdash A, \Delta}{\Gamma, \neg A \vdash \Delta}\ (\neg_g)$$

$$\frac{\Gamma \vdash A, \Delta \qquad \Gamma \vdash B, \Delta}{\Gamma \vdash A \wedge B, \Delta}\ (\wedge_d) \qquad \frac{\Gamma \vdash A, B, \Delta}{\Gamma \vdash A \vee B, \Delta}\ (\vee_d) \qquad \frac{\Gamma, A \vdash \Delta}{\Gamma \vdash \neg A, \Delta}\ (\neg_d)$$

- un séquent $X_1, \ldots, X_n \vdash Y_1, \ldots, Y_k$ est valide ssi $\{X_1, \ldots, X_n\} \cap \{Y_1, \ldots, Y_k\} \neq \emptyset$
- toutes les règles sont réversibles
- tout séquent $\Gamma \vdash \Delta$ (avec les connecteurs $\wedge$, $\vee$ et $\neg$) est la conclusion d'un argument dont les prémisses ne contiennent que des formules atomiques
- en particulier si $\Gamma \vdash \Delta$ est valide alors les prémisses de cet argument sont valides, donc prouvables par (ax_0)

Élimination des coupures *via* la complétude

- LK est correct : si $\Gamma \vdash_{LK} \Delta$ alors $\Gamma \vdash \Delta$ est valide
- LK_0 est complet : si $\Gamma \vdash \Delta$ est valide si $\Gamma \vdash_{LK_0} \Delta$
- or LK_0 est sans coupure

mais

- ça ne nous dit pas comment construire la preuve sans coupure
- c'est limité au cas propositionnel