Élimination des coupures

Lionel Vaux Auclair

I2M, université d'Aix-Marseille

M2 IMD

La coupure

On va considérer la version multiplicative de LK.
La règle de coupure s'écrit :

$$\frac{\Gamma \vdash A, \Delta \qquad \Gamma', A \vdash \Delta'}{\Gamma, \Gamma' \vdash \Delta, \Delta'} \ (cut)$$

On élimine les coupures suivant leur nature.

Coupures logiques

Le cas clé est celui d'une coupure logique : on coupe sur une formule introduite par une règle droite d'un côté et une règle gauche de l'autre.

Coupures logiques : $\wedge$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\vdots\ \pi}{\Gamma \vdash A, \Delta} \quad \dfrac{\vdots\ \rho}{\Gamma' \vdash B, \Delta'}}{\Gamma, \Gamma' \vdash A \wedge B, \Delta, \Delta'}\ (\wedge_d) \qquad \dfrac{\dfrac{\vdots\ \sigma}{\Gamma'', A, B \vdash \Delta''}}{\Gamma'', A \wedge B \vdash \Delta''}\ (\wedge_g)}{\Gamma, \Gamma', \Gamma'' \vdash \Delta, \Delta', \Delta''}\ (cut)$$

s'élimine en

$$\dfrac{\dfrac{\vdots\ \pi}{\Gamma \vdash A, \Delta} \qquad \dfrac{\dfrac{\vdots\ \rho}{\Gamma' \vdash B, \Delta'} \quad \dfrac{\vdots\ \sigma}{\Gamma'', A, B \vdash \Delta''}}{\Gamma', \Gamma'', A \vdash \Delta', \Delta''}\ (cut)}{\Gamma, \Gamma', \Gamma'' \vdash \Delta, \Delta', \Delta''}\ (cut)$$

Coupures logiques : $\vee$

$$\dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\ \pi\\ \Gamma \vdash A, B, \Delta\end{array}}{\Gamma \vdash A \vee B, \Delta}\,(\vee_d) \qquad \dfrac{\begin{array}{c}\vdots\ \rho\\ \Gamma', A \vdash \Delta'\end{array} \qquad \begin{array}{c}\vdots\ \sigma\\ \Gamma'', B \vdash \Delta''\end{array}}{\Gamma', \Gamma'', A \vee B \vdash \Delta', \Delta''}\,(\vee_g)}{\Gamma, \Gamma', \Gamma'' \vdash \Delta, \Delta', \Delta''}\,(cut)$$

s'élimine en

$$\dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\ \pi\\ \Gamma \vdash A, B, \Delta\end{array} \qquad \begin{array}{c}\vdots\ \rho\\ \Gamma', A \vdash \Delta'\end{array}}{\Gamma, \Gamma' \vdash B, \Delta, \Delta'}\,(cut) \qquad \begin{array}{c}\vdots\ \sigma\\ \Gamma'', B \vdash \Delta''\end{array}}{\Gamma, \Gamma', \Gamma'' \vdash \Delta, \Delta', \Delta''}\,(cut)$$

Coupures logiques : $\neg$

$$
\dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\ \pi\\ \Gamma, A \vdash \Delta\end{array}}{\Gamma \vdash \neg A, \Delta}\,(\neg_d) \qquad \dfrac{\begin{array}{c}\vdots\ \rho\\ \Gamma' \vdash A, \Delta'\end{array}}{\Gamma', \neg A \vdash \Delta'}\,(\neg_g)}{\Gamma, \Gamma' \vdash \Delta, \Delta'}\,(cut)
$$

s'élimine en

$$
\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\ \rho\\ \Gamma' \vdash A, \Delta'\end{array} \qquad \begin{array}{c}\vdots\ \pi\\ \Gamma, A \vdash \Delta\end{array}}{\Gamma, \Gamma' \vdash \Delta, \Delta'}\,(cut)
$$

Coupures logiques : $\forall$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\vdots\ \pi}{\Gamma \vdash A, \Delta}}{\Gamma \vdash \forall x A, \Delta}\,(\forall_d) \qquad \dfrac{\dfrac{\vdots\ \rho}{\Gamma', A[t/x] \vdash \Delta'}}{\Gamma', \forall x A \vdash \Delta'}\,(\forall_g)}{\Gamma, \Gamma' \vdash \Delta, \Delta'}\,(cut)$$

s'élimine en

$$\dfrac{\dfrac{\vdots\ \pi[t/x]}{\Gamma \vdash A[t/x], \Delta} \qquad \dfrac{\vdots\ \rho}{\Gamma', A[t/x] \vdash \Delta'}}{\Gamma, \Gamma' \vdash \Delta, \Delta'}\,(cut)$$

(vu que $x \notin \mathrm{VL}(\Gamma, \Delta)$)

Coupures logiques : ∃

$$\dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\ \pi\\ \Gamma \vdash A[t/x], \Delta\end{array}}{\Gamma \vdash \exists x A, \Delta}\,(\exists_d) \qquad \dfrac{\begin{array}{c}\vdots\ \rho\\ \Gamma', A \vdash \Delta'\end{array}}{\Gamma', \exists x A \vdash \Delta'}\,(\exists_g)}{\Gamma, \Gamma' \vdash \Delta, \Delta'}\,(cut)$$

s'élimine en

$$\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\ \pi\\ \Gamma \vdash A[t/x], \Delta\end{array} \qquad \begin{array}{c}\vdots\ \rho[t/x]\\ \Gamma', A[t/x] \vdash \Delta'\end{array}}{\Gamma, \Gamma' \vdash \Delta, \Delta'}\,(cut)$$

(vu que $x \notin \mathrm{VL}(\Gamma', \Delta')$)

Identité

Si on a coupé sur un axiome, on peut directement simplifier :

$$\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\ \pi \\ \Gamma \vdash A, \Delta\end{array} \qquad \dfrac{}{A \vdash A}\ (ax)}{\Gamma \vdash A, \Delta}\ (cut)$$

en π.

Coupures structurelles

On peut également éliminer les coupures sur des formules introduites par des règles structurelles :

$$\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\,\pi\\ \Gamma\vdash A,\Delta\end{array}\qquad \dfrac{\begin{array}{c}\vdots\,\rho\\ \Gamma'\vdash\Delta'\end{array}}{\Gamma',A\vdash\Delta'}\,(\mathit{aff})}{\Gamma,\Gamma'\vdash\Delta,\Delta'}\,(\mathit{cut}) \quad\rightsquigarrow\quad \dfrac{\begin{array}{c}\vdots\,\rho\\ \Gamma'\vdash\Delta'\end{array}}{\Gamma,\Gamma'\vdash\Delta,\Delta'}\,(\mathit{aff})$$

et

$$\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\,\pi\\ \Gamma\vdash A,\Delta\end{array}\qquad \dfrac{\begin{array}{c}\vdots\,\rho\\ \Gamma',A,A\vdash\Delta'\end{array}}{\Gamma',A\vdash\Delta'}\,(\mathit{cont})}{\Gamma,\Gamma'\vdash\Delta,\Delta'}\,(\mathit{cut}) \quad\rightsquigarrow\quad \dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\,\pi\\ \Gamma\vdash A,\Delta\end{array}\qquad \dfrac{\begin{array}{c}\vdots\,\pi\\ \Gamma\vdash A,\Delta\end{array}\qquad\begin{array}{c}\vdots\,\rho\\ \Gamma',A,A\vdash\Delta'\end{array}}{\Gamma,\Gamma',A\vdash\Delta,\Delta'}\,(\mathit{cut})}{\Gamma,\Gamma,\Gamma'\vdash\Delta,\Delta,\Delta'}\,(\mathit{cut})}{\Gamma,\Gamma'\vdash\Delta,\Delta'}\,(\mathit{cont})$$

C'est *le* cas critique !

Coupures bureaucratiques

Tous les autres cas : aucune des prémisses ne porte sur la formule coupée.
Dans ce cas, on peut remonter : par exemple,

$$\dfrac{\dfrac{\Gamma, B \vdash \Delta \qquad \Gamma', C \vdash A, \Delta'}{\Gamma, \Gamma', B \vee C \vdash A, \Delta, \Delta'}\,(\vee_g) \qquad \Gamma'', A \vdash \Delta''}{\Gamma, \Gamma', B \vee C, \Gamma'' \vdash \Delta, \Delta', \Delta''}\,(cut)$$

devient

$$\dfrac{\Gamma, B \vdash \Delta \qquad \dfrac{\Gamma', C \vdash A, \Delta' \qquad \Gamma'', A \vdash \Delta''}{\Gamma', C, \Gamma'' \vdash \Delta', \Delta''}\,(cut)}{\Gamma, \Gamma', B \vee C, \Gamma'' \vdash \Delta, \Delta', \Delta''}\,(\vee_g)$$

Comme on considère les règles multiplicatives, on crée toujours exactement une nouvelle coupure.

Élimination ?

Est-ce que tout ça finit par s'arrêter ?

- Pour les coupures logiques, les coupures créées portent sur des formules plus petites.
- Pour l'axiome, la coupure disparait.
- Pour les coupures bureaucratiques, une prémisse de la coupure est remplacée par un de ses sous-arbres stricts.
- Pour l'affaiblissement, la coupure disparait.

Élimination ?

Est-ce que tout ça finit par s'arrêter ?

- Pour les coupures logiques, les coupures créées portent sur des formules plus petites.
- Pour l'axiome, la coupure disparait.
- Pour les coupures bureaucratiques, une prémisse de la coupure est remplacée par un de ses sous-arbres stricts.
- Pour l'affaiblissement, la coupure disparait.
- Pour la contraction, *on dédouble la coupure et un des sous-arbres !*

Élimination ?

Est-ce que tout ça finit par s'arrêter ?

- Pour les coupures logiques, les coupures créées portent sur des formules plus petites.
- Pour l'axiome, la coupure disparait.
- Pour les coupures bureaucratiques, une prémisse de la coupure est remplacée par un de ses sous-arbres stricts.
- Pour l'affaiblissement, la coupure disparait.
- Pour la contraction, *on dédouble la coupure et un des sous-arbres !*

On peut quand même s'en tirer :

- en choisissant bien la stratégie (le choix de la coupure qu'on élimine parmi toutes celles disponibles dans une preuve) ;
- et en montrant qu'*une certaine mesure* décroît.

On va suivre l'astuce de Gentzen.

Degrés

- Le degré d'une formule, c'est sa hauteur en tant qu'arbre :

$$d(R(t_1, \ldots, t_n)) = 1$$
$$d(A \wedge B) = d(A \vee B) = \max(d(A), d(B)) + 1$$
$$d(\neg A) = d(\forall x A) = d(\exists x A) = d(A) + 1$$

- Le degré d'une coupure, c'est le degré de la formule coupée.
- Le degré d'une preuve π, c'est le degré maximum de ses coupures, avec $d(\pi) = 0$ si π est sans coupure.

Remarque

Pour chaque coupure logique, la règle d'élimination génère des coupures de degré strictement inférieur.

Lemme principal

Pour tous $n, p \in \mathbf{N}$, la règle :

$$\frac{\Gamma \vdash C^n, \Delta \qquad \Gamma', C^p \vdash \Delta'}{\Gamma, \Gamma' \vdash \Delta, \Delta'} \ (supercut)$$

est dérivable à partir de la coupure et des règles structurelles (avec $C^n := \overbrace{C, \ldots, C}^{n}$).
C'est facile, mais on peut faire mieux :

Lemme

Soient C une formule, et π et π' des preuves de $\Gamma \vdash C^n, \Delta$ et $\Gamma', C^p \vdash \Delta'$ respectivement, avec $d(\pi), d(\pi') < d(C)$. Alors on peut construire une preuve π_0 de $\Gamma, \Gamma' \vdash \Delta, \Delta'$ de degré strictement inférieur à $d(C)$.

Preuve du lemme principal

Par récurrence sur $h(\pi) + h(\pi')$ (où h est la hauteur des arbres). On raisonne suivant la nature de la dernière règle (c.-à-d. la racine) de π et π'.

- Si la dernière règle de π ou π' est une règle structurelle sur C, on applique directement l'hypothèse de récurrence : il suffit de changer le nombre d'occurrences supprimées.

  C'est justement pour ça qu'on considère (*supercut*).

- Si π ou π' est un axiome, par exemple π :
  - si π prouve $C \vdash C$, avec $\Gamma = C$ et Δ vide, on obtient une preuve de $C, \Gamma' \vdash \Delta'$ à partir de π' par les règles structurelles ;

    Cf. l'élimination de la coupure sur un axiome.

  - sinon π prouve $D \vdash D$, avec $\Gamma = D = \Delta$, et on obtient une preuve de $D, \Gamma' \vdash D, \Delta'$ par affaiblissement.

    Cf. l'élimination de la coupure sur un affaiblissement.

Preuve du lemme principal, suite

- Si la dernière règle de π ou π' est une règle logique ou structurelle qui n'introduit pas l'une des occurrences supprimées de C, on applique l'hypothèse de récurrence aux prémisses, puis on recolle les morceaux : par exemple, avec

$$\pi = \dfrac{\begin{array}{c}\vdots\ \rho \\ \Gamma \vdash A, B, \Delta'', C^n\end{array}}{\Gamma \vdash A \vee B, \Delta'', C^n}\ (\vee_d)$$

l'hypothèse de récurrence appliquée à ρ et π' donne une preuve ρ_0 de $\Gamma, \Gamma' \vdash A, B, \Delta'', \Delta'$ et on dérive $\Gamma, \Gamma' \vdash A \vee B, \Delta'', \Delta'$ par $(\vee_d)$.

Cf. l'élimination d'une coupure bureaucratique.

- Même chose si la dernière règle de π ou π' est une coupure (nécessairement sur un autre formule que C).

Preuve du lemme principal, fin

- Sinon, une occurrence supprimée de C est la formule introduite par une règle droite dans π et une règle gauche dans π' :
  - on suit alors le cas d'élimination de la coupure logique ;
  - les autres occurrences de C qui doivent être supprimées dans π' peuvent l'être dès les prémisses, par l'hypothèse de récurrence appliquée à π et aux sous-arbres correspondants de π' (et *vice versa*) ;
  - reste à nettoyer les contextes dupliqués par contraction.

Exemple : $\pi = \dfrac{\overset{\vdots\ \rho}{\Gamma, A \vdash \Delta, (\neg A)^n}}{\Gamma \vdash \Delta, (\neg A)^{n+1}}\ (\neg_d)$, $\pi' = \dfrac{\overset{\vdots\ \rho'}{\Gamma', (\neg A)^p \vdash A, \Delta'}}{\Gamma', (\neg A)^{p+1} \vdash \Delta'}\ (\neg_g)$

  - par hypothèse de récurrence appliquée à ρ et π', on obtient une preuve ρ_0 de $\Gamma, A, \Gamma' \vdash \Delta, \Delta'$;
  - par hypothèse de récurrence appliquée à π et ρ', on obtient une preuve ρ'_0 de $\Gamma, \Gamma' \vdash A, \Delta, \Delta'$;
  - il ne reste qu'à couper ces prémisses sur A pour obtenir une preuve de $\Gamma, \Gamma', \Gamma, \Gamma' \vdash \Delta, \Delta', \Delta, \Delta'$.

Le théorème

Lemme

Si π *est une preuve de* $\Gamma \vdash \Delta$, *et* $d(\pi) > 0$, *alors on peut construire une preuve* π' *de* $\Gamma \vdash \Delta$ *avec* $d(\pi) > d(\pi')$.

Démonstration.

Par induction sur π :

- on applique l'hypothèse d'induction aux preuves des prémisses, pour faire décroître leur degré si nécessaire ;
- si la dernière règle de π est une coupure de degré $d(\pi)$, on peut alors appliquer le lemme principal.

□

Théorème

La règle (cut) est admissible dans LK.

Logique intuitionniste

La preuve s'adapte sans difficulté au cas intuitionniste (avec $(\vee_{dg})$ et $(\vee_{dd})$).

Théorème (Constructivité)

- *Une preuve de* $\vdash A \vee B$ *dans LJ donne, par élimination des coupures, une preuve de* $\vdash A$ *ou une preuve de* $\vdash B$*.*
- *Une preuve de* $\vdash \exists y A$ *dans LJ donne, par élimination des coupures, un terme* t *tel que* $\vdash A[t/y]$*.*

Élimination des coupures = calcul ?

Toute preuve de $A \vdash B$ définit un algorithme pour obtenir une preuve de B à partir d'une preuve de A, par élimination des coupures :

$$\begin{array}{c} \vdots\ \pi \\ A \vdash B \end{array} \quad : \quad \begin{array}{c} \vdots\ \rho \\ \vdash A \end{array} \quad \mapsto \quad \dfrac{\begin{array}{c} \vdots\ \pi \\ A \vdash B \end{array} \qquad \begin{array}{c} \vdots\ \rho \\ \vdash A \end{array}}{\vdash B}\ (cut) \quad \rightsquigarrow^* \quad \begin{array}{c} \vdots\ \pi \cdot \rho \\ \vdash B \end{array}$$

En particulier, dans LJ :

- étant donnés : une preuve π de $A \vdash \exists y B$, un terme t et une preuve ρ de $\vdash A[t/x]$,
- on obtient une preuve de $\vdash \exists y B[t/x]$, en coupant $\pi[t/x]$ sur ρ,
- l'élimination des coupures donne un terme u et une preuve de $\vdash B[t/x][u/y]$

$\rightsquigarrow$ une preuve dans LJ définit une fonction calculable.

La paire critique de Lafont

Le procédé n'est absolument pas déterministe : si on prend deux preuves sans coupures π et π' de $\Gamma \vdash \Delta$, on peut en tirer

$$\dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\ \pi \\ \Gamma \vdash \Delta\end{array}}{\Gamma \vdash A, \Delta}\ (aff_d) \qquad \dfrac{\begin{array}{c}\vdots\ \pi' \\ \Gamma \vdash \Delta\end{array}}{\Gamma, A \vdash \Delta}\ (aff_g)}{\Gamma, \Gamma, \vdash \Delta, \Delta}\ (cut)$$

qui donne indifféremment

$$\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\ \pi \\ \Gamma \vdash \Delta\end{array}}{\Gamma, \Gamma \vdash \Delta, \Delta}\ (aff) \quad \text{ou} \quad \dfrac{\begin{array}{c}\vdots\ \pi' \\ \Gamma \vdash \Delta\end{array}}{\Gamma, \Gamma \vdash \Delta, \Delta}\ (aff)$$

après élimination.

Autrement dit, les preuves en calcul des séquents n'ont *à élimination des coupures près* pas de structure intéressante.

Commutations

On ne voit pas bien ce qui différencie

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{A, B \vdash B}\ (ax) \qquad \dfrac{}{A, B \vdash A}\ (ax)}{A, B \vdash B \wedge A}\ (\wedge_d)}{A \wedge B \vdash B \wedge A}\ (\wedge_g)$$

de

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{A, B \vdash B}\ (ax)}{A \wedge B \vdash B}\ (\wedge_g) \qquad \dfrac{\dfrac{}{A, B \vdash A}\ (ax)}{A \wedge B \vdash A}\ (\wedge_g)}{A \wedge B \vdash B \wedge A}\ (\wedge_d)$$

Même sans coupures, les preuves en calcul des séquents n'ont pas grand chose de canonique.

Référence

Proofs and types.

Et en déduction naturelle ?

La coupure se dérive :

$$\dfrac{\dfrac{\Gamma, A \vdash B}{\Gamma \vdash A \Rightarrow B}\,(\Rightarrow_i) \qquad \Gamma \vdash A}{\Gamma \vdash B}\,(\Rightarrow_e)$$

Élimination des coupures en déduction naturelle : $\Rightarrow$

$$\dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\ \pi\\ \Gamma, A \vdash B\end{array}}{\Gamma \vdash A \Rightarrow B}\,(\Rightarrow_i) \qquad \begin{array}{c}\vdots\ \rho\\ \Gamma \vdash A\end{array}}{\Gamma \vdash B}\,(\Rightarrow_e) \quad \text{peut être remplacé par} \quad \begin{array}{c}\vdots\ \pi'\\ \Gamma \vdash B\end{array}$$

où π' est obtenue à partir de π en remplaçant les axiomes

$$\dfrac{}{\Delta, \Gamma, A \vdash A}\,(ax)$$

par ρ (quitte à affaiblir sur Δ).

Élimination des coupures en déduction naturelle : $\Rightarrow$, $\wedge$

$$\dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\,\pi\\ \Gamma\vdash A\end{array}\qquad\begin{array}{c}\vdots\,\rho\\ \Gamma\vdash B\end{array}}{\Gamma\vdash A\wedge B}\,(\wedge_i)}{\Gamma\vdash A}\,(\wedge_{eg})\quad\text{peut être remplacé par}\quad\begin{array}{c}\vdots\,\pi\\ \Gamma\vdash A\end{array}$$

Élimination des coupures en déduction naturelle : $\Rightarrow$, $\wedge$, *etc.*

$$\dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\,\pi\\ \Gamma \vdash A\end{array} \quad \begin{array}{c}\vdots\,\rho\\ \Gamma \vdash B\end{array}}{\Gamma \vdash A \wedge B}\,(\wedge_i)}{\Gamma \vdash A}\,(\wedge_{eg}) \quad \text{peut être remplacé par} \quad \begin{array}{c}\vdots\,\pi\\ \Gamma \vdash A\end{array}$$

et similairement pour chaque connecteur/quantificateur

Et le raisonnement par l'absurde ?

$$\dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\ \pi \\ \Gamma, \neg(A \Rightarrow B) \vdash \bot\end{array}}{\Gamma \vdash A \Rightarrow B}\ (r.a.) \qquad \begin{array}{c}\vdots\ \rho \\ \Gamma \vdash A\end{array}}{\Gamma \vdash B}\ (\Rightarrow_e)$$

peut être remplacé par

Et le raisonnement par l'absurde ?

$$\dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\ \pi\\ \Gamma, \neg(A \Rightarrow B) \vdash \bot\end{array}}{\Gamma \vdash A \Rightarrow B}\ (r.a.) \qquad \begin{array}{c}\vdots\ \rho\\ \Gamma \vdash A\end{array}}{\Gamma \vdash B}\ (\Rightarrow_e)$$

peut être remplacé par euh. . .

NJ

Dans *NJ* (sans règles structurelles) :

- il n'y a pas de coupure bureaucratique, ni structurelle ;
- une coupure, c'est une règle d'élimination dont la prémisse principale est une règle d'introduction (nécessairement du même connecteur) ;
- on peut montrer que toute preuve peut être normalisée *de manière unique* en une preuve sans coupure.

À suivre. . .