Le λ-calcul

Lionel Vaux Auclair

I2M, université d'Aix-Marseille

M2 IMD

λ-termes

L'ensemble Λ des λ-termes est défini inductivement par :

$$\Lambda \ni s, t, \ldots ::= x \mid \lambda x.s \mid s\,t$$

où x parcourt un ensemble infini dénombrable de variables $\mathcal{V}$
et les occurrences de x dans s sont liées par l'abstraction $\lambda x.s$

Il faut voir ces termes comme *codant* des fonctions :

- $\lambda x.s$ abstrait la variable x dans s : c'est le code de $x \mapsto s$;

  Ne pas confondre une expression dépendant d'une variable avec la fonction correspondante (par exemple, $x + 1 \neq y + 1$, tandis que $(x \mapsto x + 1) = (y \mapsto y + 1)$).
- $s\,t$ est l'application du terme s au terme t ;
- le calcul fait le lien entre les deux.

β-réduction

L'expression $(\lambda x.s)\,t$ se réduit en $s[t/x]$ (la valeur de s pour $x := t$).

Une analogie : si P est un polynôme en x et y, $x \mapsto P$ associe à chaque valeur de x le polynôme en y obtenu en remplaçant x par sa valeur.

β-réduction

L'expression $(\lambda x.s)\, t$ se réduit en $s[t/x]$ (la valeur de s pour $x := t$).

Une analogie : si P est un polynôme en x et y, $x \mapsto P$ associe à chaque valeur de x le polynôme en y obtenu en remplaçant x par sa valeur.

Plus formellement :

- On note $s[t/x]$ le résultat de la substitution de t à x dans s.

  On utilise l'α-équivalence pour éviter les captures de variables libres de t.

  $\rightsquigarrow$ Pour fixer les idées : exercices 1 et 2.
- On appelle redex (pour *reducible expression*) toute expression de la forme $(\lambda x.s)\, t$.
- On dit que $s[t/x]$ est le réduit de $(\lambda x.s)\, t$, et on note $(\lambda x.s)\, t \to_{\beta_0} s[t/x]$.
- La β-réduction $\to_\beta$ est la plus petite relation *compatible avec la syntaxe* sur Λ contenant $\to_{\beta_0}$.

β-réduction : définition

Définition

La β-réduction $\to_\beta$ est définie inductivement par :

- $(\lambda x.s)\,t \to_\beta s[t/x]$ pour tous s, t, x ;
- si $s \to_\beta s'$ alors $\lambda x.s \to_\beta \lambda x.s'$, $s\,t \to_\beta s'\,t$ et $t\,s \to_\beta t\,s'$ pour tout t.

Autrement dit, $s \to_\beta s'$ si et seulement si on peut dériver $s \to s'$ par les règles suivantes :

$$\frac{}{(\lambda x.s)\,t \to s[t/x]} \qquad \frac{s \to s'}{\lambda x.s \to \lambda x.s'} \qquad \frac{s \to s'}{s\,t \to s'\,t} \qquad \frac{t \to t'}{s\,t \to s\,t'}$$

Pause ! Où est passée la logique ?

Considérons une grammaire de types fonctionnels simples :

$$A, B, C ::= X \mid A \to B$$

et fixons une partition de $\mathcal{V}$ en ensembles $\mathcal{V}_A$ pour chaque type A.

Définition (λ-termes simplement typés (à la Church))

Les termes typés sont définis inductivement comme suit :

- une variable x est du type A tel que $x \in \mathcal{V}_A$;
- si s est de type B et $x \in \mathcal{V}_A$ alors $\lambda x^A.s$ est de type $A \to B$;
- si s est de type $A \to B$ et t de type A alors $s\,t$ est de type B.

Ça vous rappelle quelque chose ?

Isomorphisme de Curry–Howard

Une preuve dans le système :

$$\dfrac{}{\Gamma, A \vdash A}\ (ax) \qquad \dfrac{\Gamma, A \vdash B}{\Gamma \vdash A \Rightarrow B}\ (\Rightarrow_i) \qquad \dfrac{\Gamma \vdash A \Rightarrow B \qquad \Gamma \vdash A}{\Gamma \vdash B}\ (\Rightarrow_e)$$

c'est la même chose qu'un λ-terme typé s (+ un ensemble de variables $\Gamma \supseteq \mathrm{VL}(s)$).
Mieux :

Lemme

Si s est de type B, t est de type A et $x \in \mathcal{V}_A$ alors $s[t/x]$ est bien typé, de type B.

Démonstration: Par induction sur s. □

La β-réduction = l'élimination des coupures en déduction naturelle pour $\Rightarrow$.

On tirera ce fil plus tard : on étudie d'abord le λ-calcul *per se*.

Exemples

Quelques termes :

- $I := \lambda x.x$ (identité)
- $K := \lambda x.\lambda y.x$ (première projection)
- $\underline{0} := \lambda x.\lambda y.y$ (deuxième projection)
- $\underline{1} := \lambda f.\lambda x.f\,x$ (identité sur les fonctions)
- $\circ := \lambda f.\lambda g.\lambda x.f\,(g\,x)$ (composition)
- $S := \lambda f.\lambda g.\lambda x.f\,x\,(g\,x)$ (composition un peu tordue)
- $\underline{2} := \lambda f.\lambda x.f\,(f\,x)$ (2ème itération)

Notations (économisons les parenthèses)

- on note $s\,t_1 \cdots t_n := (\cdots(s\,t_1)\cdots)\,t_n$
- l'application a priorité sur l'abstraction

$$\lambda f.\lambda g.\lambda x.f\,x\,(g\,x) \qquad \text{se lit} \qquad \lambda f.\Big\{\lambda g.\{\lambda x.\{(f\,x)\,(g\,x)\}\}\Big\}$$

Exemples

Quelques termes :

- $I := \lambda x.x$ (identité)
- $K := \lambda x.\lambda y.x$ (première projection)
- $\underline{0} := \lambda x.\lambda y.y$ (deuxième projection)
- $\underline{1} := \lambda f.\lambda x.f\,x$ (identité sur les fonctions)
- $\circ := \lambda f.\lambda g.\lambda x.f\,(g\,x)$ (composition)
- $S := \lambda f.\lambda g.\lambda x.f\,x\,(g\,x)$ (composition un peu tordue)
- $\underline{2} := \lambda f.\lambda x.f\,(f\,x)$ (2ème itération)

Quelques réductions : en choisissant $f, g, x, y \in \mathcal{V}$ distinctes et $\notin \mathrm{VL}(s, t)$

$$
\begin{aligned}
I\,s &\to_\beta s \\
K\,s\,t &\to_\beta (\lambda y.s)\,t \to_\beta s \\
\underline{0}\,s\,t &\to_\beta I\,t \to_\beta t \\
\underline{1}\,s &\to_\beta \lambda x.s\,x
\end{aligned}
\qquad
\begin{aligned}
\lambda h.\circ\,h\,h &\to_\beta \lambda h.(\lambda g.\lambda x.h\,(g\,x))\,h \\
&\to_\beta \lambda h.\lambda x.h\,(h\,x) = \underline{2} \\
S\,s\,I &\to_\beta (\lambda g.\lambda x.s\,x\,(g\,x))\,I \\
&\to_\beta \lambda x.s\,x\,(I\,x) \to_\beta \lambda x.s\,x\,x
\end{aligned}
$$

Formes irréductibles

Jusque là, on est toujours arrivés à un terme sans redex visible.

Définition

Un terme $s \in \Lambda$ est dit β-irréductible s'il ne contient aucun redex ou, de manière équivalente s'il n'y a pas de s' t.q. $s \to_\beta s'$.

Formes irréductibles

Jusque là, on est toujours arrivés à un terme sans redex visible.

Définition

Un terme $s \in \Lambda$ est dit β-irréductible s'il ne contient aucun redex ou, de manière équivalente s'il n'y a pas de s' t.q. $s \to_\beta s'$.

Deux questions :

- peut-on toujours se ramener à une forme irréductible ?
- un terme peut-il avoir plusieurs formes irréductibles ?

Formes irréductibles

Jusque là, on est toujours arrivés à un terme sans redex visible.

Définition

Un terme $s \in \Lambda$ est dit β-irréductible s'il ne contient aucun redex ou, de manière équivalente s'il n'y a pas de s' t.q. $s \to_\beta s'$.

Deux questions :

- peut-on toujours se ramener à une forme irréductible ?
- un terme peut-il avoir plusieurs formes irréductibles ?

Considérons les termes :

- $\Delta := \lambda x.x\,x$ (auto-application)

$$\Delta\, I \to_\beta I\, I \to_\beta I \qquad \Delta\, \underline{2} \to_\beta \underline{2}\,\underline{2} \to_\beta \lambda h.\underline{2}\,(\underline{2}\,h) \to_\beta \lambda h.\lambda x.\underline{2}\,h\,(\underline{2}\,h\,x)$$

$$\to_\beta^2 \lambda h.\lambda x.\underline{2}\,h\,(h\,(h\,x)) \to_\beta^2 \lambda h.\lambda x.h\,(h\,(h\,(h\,x))) = \underline{4}$$

Formes irréductibles

Jusque là, on est toujours arrivés à un terme sans redex visible.

Définition

Un terme $s \in \Lambda$ est dit *β-irréductible* s'il ne contient aucun redex ou, de manière équivalente s'il n'y a pas de s' t.q. $s \to_\beta s'$.

Deux questions :

- peut-on toujours se ramener à une forme irréductible ? **NON**
- un terme peut-il avoir plusieurs formes irréductibles ?

Considérons les termes :

- $\Delta := \lambda x.x\,x$ (auto-application)
- $\Omega := \Delta\,\Delta$ (boucle infinie)

$$\Delta\,\Delta \to_\beta \Delta\,\Delta$$

Formes irréductibles

Jusque là, on est toujours arrivés à un terme sans redex visible.

Définition

Un terme $s \in \Lambda$ est dit β-irréductible s'il ne contient aucun redex ou, de manière équivalente s'il n'y a pas de s' t.q. $s \to_\beta s'$.

Deux questions :

- peut-on toujours se ramener à une forme irréductible ? **NON**
- un terme peut-il avoir plusieurs formes irréductibles ?

Considérons les termes :

- $\Delta := \lambda x.x\,x$ (auto-application)
- $\Omega := \Delta\,\Delta$ (boucle infinie)

$$\lambda h.\lambda x.\underline{2}\,h\,(\underline{2}\,h\,x) \to_\beta^2 \lambda h.\lambda x.\underline{2}\,h\,(h\,(h\,x))$$

Formes irréductibles

Jusque là, on est toujours arrivés à un terme sans redex visible.

Définition

Un terme $s \in \Lambda$ est dit β-irréductible s'il ne contient aucun redex ou, de manière équivalente s'il n'y a pas de s' t.q. $s \to_\beta s'$.

Deux questions :

- peut-on toujours se ramener à une forme irréductible ? **NON**
- un terme peut-il avoir plusieurs formes irréductibles ? **pas évident**

Considérons les termes :

- $\Delta := \lambda x.x\,x$ (auto-application)
- $\Omega := \Delta\,\Delta$ (boucle infinie)

$$\lambda h.\lambda x.\underline{2}\,h\,(\underline{2}\,h\,x) \to_\beta^2 \lambda h.\lambda x.h\,(h\,(\underline{2}\,h\,x))$$

Formes irréductibles

Jusque là, on est toujours arrivés à un terme sans redex visible.

Définition

Un terme $s \in \Lambda$ est dit β-irréductible s'il ne contient aucun redex ou, de manière équivalente s'il n'y a pas de s' t.q. $s \to_\beta s'$.

Deux questions :

- peut-on toujours se ramener à une forme irréductible ? **NON**
- un terme peut-il avoir plusieurs formes irréductibles ? **pas évident**

Considérons les termes :

- $\Delta := \lambda x.x\,x$ (auto-application)
- $\Omega := \Delta\,\Delta$ (boucle infinie)

$\rightsquigarrow$ Exercice 3.

Confluence

On va montrer qu'un terme se réduit à au plus une forme irréductible.
Il suffit de montrer que $\to_\beta$ est confluente :

Définition

Soit $\to \subseteq A \times A$ une relation binaire sur un ensemble A.

- On dit que $\to$ est fortement confluente si, chaque fois que $a \to a_1$ et $a \to a_2$, il existe un $a' \in A$ tel que $a_1 \to a'$ et $a_2 \to a'$.
- La fermeture réflexive et transitive de $\to$ est la plus petite relation réflexive et transitive contenant $\to$: on la note $\to^*$.
- On dit que $\to$ est confluente si $\to^*$ est fortement confluente.

Alors si $s \to_\beta^* t_1$ et $s \to_\beta^* t_2$ avec t_1 et t_2 irréductibles, on a nécessairement $t_1 = t_2$.

Réduction et substitution

Si on essaie de prouver la confluence forte pour $\to_\beta$, en regardant les cas possibles de couples de réduction $s \to_\beta s_1$ et $s \to_\beta s_2$, le cas du redex (par ex. $(\lambda x.s)\, t \to_\beta s[t/x]$ et $(\lambda x.s)\, t \to_\beta (\lambda x.s)\, t'$ avec $t \to_\beta t'$) nous amène étudier la réduction dans une substitution :

Lemme

- *Si $s \to_\beta s'$ alors $s[t/x] \to_\beta s'[t/x]$.*
- *Si $t \to_\beta t'$ alors $s[t/x] \to_\beta^* s[t'/x]$.*

Démonstration: Par induction sur s. □

Il faut étendre à $\to_\beta^*$ dans le deuxième cas : $\to_\beta$ n'est pas fortement confluente (voir avec $\underline{2}\,(I\,I)$).

Corollaire

Si $s \to_\beta^* s'$ et $t \to_\beta^* t'$ alors $s[t/x] \to_\beta^* s'[t'/x]$.

Mais si on cherche à regarder tous les cas possibles pour des réductions $s \to_\beta^* s_1$ et $s \to_\beta^* s_2$ on s'y perd à cause de la transitivité.

Réduction parallèle

On utilise une méthode dûe à Tait et Martin-Löf : on étend $\rightarrow_\beta$ en une relation contextuelle, en autorisant la réduction simultanée d'un nombre quelconque de redex.

Définition

La β-réduction parallèle $\rightrightarrows_\beta$ est définie inductivement par :

- $s \rightrightarrows_\beta s$ pour tout $s \in \Lambda$;
- si $s \rightrightarrows_\beta s'$ alors $\lambda x.s \rightrightarrows_\beta \lambda x.s'$,
- si $s \rightrightarrows_\beta s'$ et $t \rightrightarrows_\beta t'$ alors $s\,t \rightrightarrows_\beta s'\,t'$ et $(\lambda x.s)\,t \rightrightarrows_\beta s'[t'/x]$.

Autrement dit, $s \rightrightarrows_\beta s'$ si et seulement si on peut dériver $s \rightarrow s'$ par les règles suivantes :

$$\frac{}{s \rightarrow s} \qquad \frac{s \rightarrow s' \quad t \rightarrow t'}{(\lambda x.s)\,t \rightarrow s'[t'/x]} \qquad \frac{s \rightarrow s'}{\lambda x.s \rightarrow \lambda x.s'} \qquad \frac{s \rightarrow s' \quad t \rightarrow t'}{s\,t \rightarrow s'\,t'}$$

Confluence forte de la réduction parallèle

Lemme

Si $s \rightrightarrows_\beta s'$ et $t \rightrightarrows_\beta t'$ alors $s[t/x] \rightrightarrows_\beta s'[t'/x]$.

Démonstration: Comme pour $\rightarrow_\beta$. □

Théorème

Si $s \rightrightarrows_\beta s_1$ et $s \rightrightarrows_\beta s_2$ alors il existe s' t.q. $s_1 \rightrightarrows_\beta s'$ et $s_2 \rightrightarrows_\beta s'$.

Démonstration: Par induction sur la définition de chaque réduction, en utilisant le lemme de substitution dans les cas des redex. □

Corollaire

La β-réduction parallèle est confluente.

Démonstration: Une relation fortement confluente est toujours confluente.

$\leadsto$ Exercice 4.

□

Church–Rosser

Définition

On appelle *β-équivalence* la fermeture réflexive, symétrique et transitive $=_\beta$ de $\to_\beta$ (c.-à-d. la plus petite relation d'équivalence contenant $\to_\beta$).

Théorème

On a $s =_\beta s'$ ssi il existe t tel que $s \to_\beta^* t$ et $s' \to_\beta^* t$.

Démonstration:

- Il est facile de voir que $\to_\beta \subseteq \rightrightarrows_\beta$, par induction sur $\to_\beta$.
- On a aussi $\rightrightarrows_\beta \subseteq \to_\beta^*$, par induction sur $\rightrightarrows_\beta$, et le lemme de substitution pour $\to_\beta^*$.
- Donc $\to_\beta^* = \rightrightarrows_\beta^*$, et on obtient la confluence de $\to_\beta$.
- Le fait que le théorème s'en déduise est un fait général sur les relations binaires.

$\rightsquigarrow$ Exercice 5.

□

Formes normales et structure de tête

Par Church–Rosser, pour tout $s \in \Lambda$ il y a au plus un t irréductible avec $s =_\beta t$:
on dit alors que t est la forme normale de s et on note $t = \mathrm{N}(s)$.

Lemme

Tout λ-terme s peut s'écrire sous l'une des deux formes :

- $s = \lambda x_1. \cdots \lambda x_n.(\lambda x.u)\, t_0 \cdots t_k$ *: on dit que $(\lambda x.u)\, t_0$ est le redex de tête de s ;*
- $s = \lambda x_1. \cdots \lambda x_n.x\, t_1 \cdots t_k$ *: on dit que s est en forme normale de tête et que x est sa variable de tête.*

Démonstration: Par induction sur s. □

Corollaire

Un λ-terme s est irréductible ssi il s'écrit $s = \lambda x_1. \cdots \lambda x_n.x\, t_1 \cdots t_k$, avec $t_1, \ldots, t_k$ irréductibles.

Réduction de tête

Définition

La β-réduction de tête $\to_{\beta_t}$ est définie par la seule étape :

$$\lambda x_1.\cdots\lambda x_n.(\lambda x.s)\, t_0 \cdots t_k \to_{\beta_t} \lambda x_1.\cdots\lambda x_n.s[t_0/x]\, t_1 \cdots t_k$$

Cette réduction est fonctionnelle : il y a au plus un s' tel que $s \to_{\beta_t} s'$.

Lemme

Un λ-terme s est normalisable de tête (c.-à-d. qu'il existe une forme normale de tête t t.q. $s =_\beta t$) ssi la suite des réductions de tête de s est finie.

Démonstration: Admis (pour l'instant). □

La réduction de tête peut mener à une autre forme normale de tête que t
(mais elle aura la même structure de tête par confluence).

Réduction gauche

Définition

La β-réduction gauche $\rightarrow_{\beta_g}$ est définie inductivement par :

- si $s \rightarrow_{\beta_t} s'$ alors $s \rightarrow_{\beta_g} s'$;
- $s \rightarrow_{\beta_g} \lambda x_1. \cdots \lambda x_n.x\, t_1 \cdots t'_i \cdots t_k$ si
  - $s = \lambda x_1. \cdots \lambda x_n.x\, t_1 \cdots t_k$,
  - $t_i \rightarrow_{\beta_g} t'_i$,
  - et t_j est en forme normale pour $1 \leq j < i$.

Théorème

Si s admet une forme normale, alors $s \rightarrow^*_{\beta_g} \mathrm{N}(s)$.

Démonstration: Par induction sur $\mathrm{N}(s)$, en appliquant le lemme sur la réduction de tête. $\square$

On a donc une stratégie pour normaliser.

$\rightsquigarrow$ Exercice 6.

Références

Barendregt (exhaustif) et Krivine (économe).