DM: réduction gauche

Lionel Vaux Auclair

M2 IMD, Logique et automates, 2022–2023

On va montrer le théorème :

Théorème 1. *Si s est normalisable de tête, alors $s \to_{\beta_t}^* s_0$.*

Exercice 1. On commence par définir une réduction parallèle *interne* inductivement par les règles suivantes :

$$\frac{}{s \rightrightarrows_{\beta_i} s}\ (1) \quad \frac{s \rightrightarrows_{\beta_i} s'}{\lambda x.s \rightrightarrows_{\beta_i} \lambda x.s'}\ (2) \quad \frac{s \rightrightarrows_{\beta_i} s' \quad t \rightrightarrows_\beta t'}{s\,t \rightrightarrows_{\beta_i} s'\,t'}\ (3) \quad \frac{s \rightrightarrows_\beta s' \quad t \rightrightarrows_\beta t'}{(\lambda x.s)\,t \rightrightarrows_{\beta_i} (\lambda x.s')\,t'}\ (4) \quad .$$

Intuititivement, c'est la réduction parallèle dans laquelle on interdit de réduire le redex de tête. On va d'ailleurs montrer que c'est un cas particulier de réduction parallèle, qui préserve la structure de tête :

1. Montrez que $s \rightrightarrows_\beta s'$ dès que $s \rightrightarrows_{\beta_i} s'$. *(sur 2)*

2. Montrez que si $s \rightrightarrows_{\beta_i} s'$ alors :

- s est une variable ssi s' est une variable (et alors $s = s'$) ;
- s est une abstraction ssi s' est une abstraction ;
- s est une application ssi s' est une application ;
- s est un redex ssi s' est un redex.

(sur 2)

3. Montrez que si $s \rightrightarrows_{\beta_i} s'$ alors s est en forme normale de tête ssi s' est en forme normale de tête, et que dans ce cas on peut écrire $s = \lambda x_1. \cdots \lambda x_k.x\,t_1 \cdots t_n$ et $s' = \lambda x_1. \cdots \lambda x_k.x\,t'_1 \cdots t'_n$ avec $t_i \rightrightarrows_\beta t'_i$ pour $1 \leq i \leq n$ (raisonner par induction sur la dérivation $s \rightrightarrows_{\beta_i} s'$). *(sur 2)*

Exercice 2. On note $s \leadsto s'$ si il existe $s_0, \ldots, s_n$ tels que $s = s_0$, $s_n \rightrightarrows_{\beta_i} s'$, et $s_i \to_{\beta_t} s_{i+1}$ et $s_i \rightrightarrows_\beta s'$ pour $0 \leq i < n$: on décompose une étape de réduction parallèle en une suite de réductions de tête suivies d'une unique réduction parallèle interne, chaque segment final de cette succession de réductions pouvant se ramener à une réduction parallèle. De manière équivalente, $\leadsto$ est définie inductivement par les règles suivantes :

$$\frac{s \rightrightarrows_{\beta_i} s'}{s \leadsto s'}\ (i) \qquad \frac{s \to_{\beta_t} s_1 \quad s_1 \leadsto s' \quad s \rightrightarrows_\beta s'}{s \leadsto s'}\ (h) \quad .$$

1. Vérifiez que les deux définitions de $s \leadsto s'$ ci-dessus sont équivalentes.

Notez qu'en particulier $s \leadsto s'$ implique $s \rightrightarrows_\beta s'$ et $s \to_{\beta_t}^* \cdot \rightrightarrows_{\beta_i} s'$. On va montrer que toute étape de réduction parallèle est une instance de $\leadsto$: en conséquence, toute réduction $s \rightrightarrows_\beta s$ peut être mise sous la forme $s \to_{\beta_t}^* \cdot \rightrightarrows_{\beta_i} s'$.

2. Montrez que si $s \rightarrow_{\beta_t} s'$ alors $s[t/x] \rightarrow_{\beta_t} s'[t/x]$. *(sur 1)*

3. Montrez que si $s \rightsquigarrow s'$ alors $\lambda x.s \rightsquigarrow \lambda x.s'$ (par exemple par induction sur la réduction $s \rightsquigarrow s'$). *(sur 1)*

4. Montrez que si $s \rightsquigarrow s'$ et $t \rightrightarrows_\beta t'$ alors $s\,t \rightsquigarrow s'\,t'$ (par exemple par induction sur la réduction $s \rightsquigarrow s'$). *(sur 2)*

5. Montrez que si $t \rightsquigarrow t'$ alors $s[t/x] \rightsquigarrow s[t'/x]$ (par exemple par induction sur s). *(sur 2)*

6. Montrez que si $s \rightrightarrows_{\beta_i} s'$ et $t \rightsquigarrow t'$ alors $s[t/x] \rightsquigarrow s'[t'/x]$ (par exemple par induction sur la réduction $s \rightrightarrows_{\beta_i} s'$). *(sur 2)*

7. Déduisez des questions 2 et 6 que si $s \rightsquigarrow s'$ et $t \rightsquigarrow t'$ alors $s[t/x] \rightsquigarrow s'[t'/x]$ (par exemple par induction sur la réduction $s \rightsquigarrow s'$). *(sur 1)*

8. Montrez que si $s \rightrightarrows_\beta s'$ alors $s \rightsquigarrow s'$ (par exemple par induction sur la réduction $s \rightrightarrows_\beta s'$; on utilise bien sûr tout ce qui précède). *(sur 1)*

Exercice 3. On peut maintenant montrer que, dans toute suite de réductions, on peut choisir de commencer par les réductions de tête :

1. Montrez que si $s \rightrightarrows_{\beta_i} s_0 \rightarrow_{\beta_t} s'$ alors $s \rightsquigarrow s'$ (par exemple par induction sur la réduction $s \rightrightarrows_{\beta_i} s_0$; on utilise les résultats de l'exercice 2). *(sur 2)*

2. Déduisez des questions précédentes que si $s \rightrightarrows_{\beta_i} \cdot \rightarrow^*_{\beta_t} s'$ alors $s \rightarrow^*_{\beta_t} \cdot \rightrightarrows_{\beta_i} s'$. *(sur 2)*

3. Déduisez de tout ce qui précède que si $s \rightarrow^*_\beta s'$ alors $s \rightarrow^*_{\beta_t} \cdot \rightrightarrows^*_{\beta_i} s'$. *(sur 1)*

4. Déduisez-en le théorème. *(sur 1)*