

DM: $\neg\neg$ -traduction

Lionel Vaux Auclair

M2 IMD, Logique et automates, 2022–2023

On considère le calcul des séquents classique LK réduit aux formules implicatives :

$$A, B, \dots ::= X \mid A \Rightarrow B \quad .$$

Pour ce fragment, les règles de LK sont :

$$\frac{}{\Gamma, A \vdash A, \Delta} \text{ (ax)} \quad \frac{\Gamma \vdash A, \Delta \quad \Gamma, A \vdash \Delta}{\Gamma \vdash \Delta} \text{ (cut)}$$
$$\frac{\Gamma, A \vdash B, \Delta}{\Gamma \vdash A \Rightarrow B, \Delta} \text{ (}\Rightarrow_d\text{)} \quad \frac{\Gamma \vdash A, \Delta \quad \Gamma, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \Rightarrow B \vdash \Delta} \text{ (}\Rightarrow_g\text{)}$$

ainsi que les règles d'affaiblissement et contraction, plus les règles d'échange, qu'on garde implicites.

On considère par ailleurs le système de déduction naturelle pour la logique minimale implicative NM :

$$\frac{}{\Gamma, A \vdash A} \text{ (ax)} \quad \frac{\Gamma, A \vdash B}{\Gamma \vdash A \Rightarrow B} \text{ (}\Rightarrow_i\text{)} \quad \frac{\Gamma \vdash A \Rightarrow B \quad \Gamma \vdash A}{\Gamma \vdash B} \text{ (}\Rightarrow_e\text{)}$$

plus la règle d'échange, qu'on garde implicite (affaiblissement et contraction sont admissibles dans ce système, avec la même preuve que pour le système du cours).

Dans la suite, on fixe une formule R quelconque. Pour toute formule A , on note $\neg_R A = A \rightarrow R$.

Exercice 1. Montrez $A \vdash \neg_R \neg_R A$ dans NM .

Exercice 2. Montrez que si $R \vdash A$ est prouvable dans LK alors $\neg_R \neg_R A \vdash A$ aussi.

On définit maintenant une traduction des formules et des séquents de la manière suivante :

$$\begin{aligned} X^R &= \neg_R \neg_R X \\ (A \Rightarrow B)^R &= A^R \Rightarrow B^R \\ (A_1, \dots, A_n \vdash B_1, \dots, B_k)^R &= A_1^R, \dots, A_n^R, \neg_R B_1^R, \dots, \neg_R B_k^R \vdash R \end{aligned}$$

Exercice 3. Montrez que pour toute formule A , $\neg_R \neg_R A^R \vdash A^R$ est prouvable dans NM .

Exercice 4. Montrez que si $\Gamma \vdash \Delta$ est prouvable dans LK , alors $(\Gamma \vdash \Delta)^R$ est prouvable dans NM .